Anno Scolastico 2014/15 - **Classe 3B**
Soluzioni della verifica di matematica del 9 Maggio 2015

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali o logaritmiche. Dove è necessario, scrivere le condizioni di esistenza (condizioni di accettabilità) e usarle per verificare se le soluzioni trovate sono accettabili oppure no.

Es 1
$$3 \cdot 5^x - 5^{x+2} - 1 = 0$$

$$3 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x = 1$$
$$5^x(3 - 25) = 1$$
$$-22 \cdot 5^x = 1$$
$$5^x = -\frac{1}{22}$$

Impossibile perchè l'esponenziale 5^x è sempre strettamente positivo.

Es 2
$$2^x - 8^{x-1} = 0$$

METODO I

$$2^x - \frac{8^x}{8} = 0$$
$$2^x - \frac{(2^3)^x}{8} = 0$$
$$2^x - \frac{(2^x)^3}{8} = 0$$
$$8 \cdot 2^x - (2^x)^3 = 0.$$

Poniamo $y = 2^x$, quindi otteniamo:

$$8y - y^3 = 0$$

Raccogliendo abbiamo

$$y(8 - y^2) = 0$$

Quindi $y = 0$ oppure $8 - y^2 = 0$. Se $8 - y^2 = 0$, allora $y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. Quindi le 3 soluzioni sono

$$y_1 = -2\sqrt{2}, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 2\sqrt{2}$$

Visto che $y = 2^x$, allora deve essere

$$2^x = -2\sqrt{2} \quad \text{oppure} \quad 2^x = 0 \quad \text{oppure} \quad 2^x = 2\sqrt{2}$$

I primi 2 casi non possono succedere perché 2^x è sempre strettamente positivo. Il terzo caso ci dice che

$$2^x = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2}$$

Quindi $x = 3/2$.

METODO II

$$\begin{aligned} 2^x - 8^{x-1} &= 0 \\ 2^x &= 8^{x-1} \\ 2^x &= (2^3)^{x-1} \\ 2^x &= 2^{3x-3} \\ x &= 3x - 3 \\ 2x &= 3 \\ x &= 3/2 \end{aligned}$$

Es 3

$$\frac{6^x - 8 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 72}{x-2} = 0$$

Prima di cominciare a scomporre il numeratore, osserviamo che le condizioni di esistenza sono date da $x - 2 \neq 0$, cioé $x \neq 2$. Una volta imposta questa condizione, possiamo moltiplicare a destra e a sinistra per il termine $x - 2$, che è diverso da zero nel dominio di esistenza. Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} 6^x - 8 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 72 &= 0 \\ 2^x \cdot 3^x - 8 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 72 &= 0 \\ 3^x(2^x - 8) - 9(2^x - 8) &= 0 \\ (2^x - 8)(3^x - 9) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni sono date da

$$2^x - 8 = 0 \quad \text{oppure} \quad 3^x - 9 = 0$$

La prima equazione si riscrive come $2^x = 2^3$, quindi $x = 3$, la seconda equazione si riscrive come $3^x = 3^2$, quindi $x = 2$. La soluzione $x = 3$ è accettabile, mentre la soluzione $x = 2$ non è accettabile a causa delle condizioni di esistenza. Quindi $x = 3$

è l'unica soluzione dell'esercizio.

Es 4
$$\frac{1}{2}\log_2(x^2-1)-\log_4 x=\log_2(\sqrt{1.5})$$

Prima di tutto, cerchiamo le condizioni di esistenza.

A) il primo logaritmo è ben definito solo se $x^2-1>0$. Questo succede se e solo se $x<-1$ oppure $x>1$.

B) il secondo logaritmo è ben definito solo per $x>0$.

Mettendo a sistema le condizioni di A) e di B), otteniamo che il dominio di esistenza è $x>1$. Vogliamo ottenere un'equazione in cui ogni termine sia un logaritmo con la stessa base. Ricordiamo che vale

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Quindi

$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{2}.$$

Quindi l'equazione di partenza diventa:

$$\frac{1}{2}\log_2(x^2-1)-\frac{\log_2 x}{2}=\log_2(\sqrt{1.5}).$$

Moltiplichiamo per 2 a destra e a sinistra per rimuovere i denominatori

$$\log_2(x^2-1)-\log_2 x=2\log_2(\sqrt{1.5})$$
$$\log_2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\log_2(1.5)$$

Quindi abbiamo:

$$\frac{x^2-1}{x}=1.5$$

Visto che siamo nel dominio di esistenza ($x>1$), allora possiamo moltiplicare per $x\neq 0$ e otteniamo

$$x^2-1=1.5x$$
$$x^2-1.5x-1=0$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$x_{1,2} = \frac{1.5 \pm \sqrt{1.5^2 + 4}}{2} = \frac{1.5 \pm \sqrt{6.25}}{2} = \frac{1.5 \pm 2.5}{2}$$

La prima soluzione è

$$x_1 = \frac{1.5 - 2.5}{2} = -\frac{1}{2}$$

Questa soluzione è negativa, quindi in particolare $x_1 \leq 1$, quindi x_1 è da escludere a causa delle condizioni di esistenza. La seconda soluzione è

$$x_2 = \frac{1.5 + 2.5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

x_2 è accettabile perché le condizioni di esistenza sono date da $x > 1$ Quindi l'unica soluzione del problema è il valore $x_2 = 2$.

Es 5

$$\frac{\sqrt[x]{5^{2x+3}}}{\sqrt[3x]{125^{x+1}}} = \sqrt[3]{5}$$

Visto che abbiamo due radici della forma $\sqrt[x]{a} = a^{1/x}$, allora dobbiamo imporre $x \neq 0$ come condizione di esistenza. Il denominatore non crea problemi di esistenza perché è diverso da zero. Infatti è ottenuto elevando 125 alla $(x+1)/(3x)$.

$$\frac{5^{(2x+3)/x}}{(5^3)^{(x+1)/(3x)}} = 5^{1/3}$$

$$\frac{5^{(2x+3)/x}}{5^{(x+1)/x}} = 5^{1/3}$$

$$5^{(2x+3)/x-(x+1)/x} = 5^{1/3}$$

$$\frac{2x+3}{x} - \frac{x+1}{x} = \frac{1}{3}$$

Visto che abbiamo già imposto $x \neq 0$, allora possiamo moltiplicare per $3x \neq 0$ e otteniamo:

$$3(2x + 3 - x - 1) = x$$

$$3x + 4 = x$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

Il valore -2 è accettabile, quindi è l'unica soluzione dell'esercizio.

Scrivere le condizioni di esistenza (se necessario); poi risolvere le seguenti disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Es 6
$$e^{2x} - 8e^x - 33 < 0$$

Sostituiamo $y = e^x$ e otteniamo la disequazione

$$y^2 - 8y - 33 < 0$$

Le soluzioni dell'equazione $y^2 - 8y - 33 = 0$ sono

$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 33 \cdot 4}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 132}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{8 \pm 14}{2} = 4 \pm 7.$$

Quindi le soluzioni sono $y_1 = -3$ e $y_2 = 11$. Visto che il termine in y^2 ha coefficiente positivo (uguale a 1), allora il segno di $y^2 - 8y - 33$ è:

- positivo per $y < -3$;
- negativo per $-3 < y < 11$;
- positivo per $y > 11$

(ed è zero in $y = -3$ e $y = 11$). Visto che dobbiamo cercare le soluzioni di $y^2 - 8y - 33 < 0$, allora concludiamo che deve essere

$$-3 < y < 11$$

Sostituendo $y = e^x$ otteniamo

$$-3 < e^x < 11$$

Ovvero:

$$\left\{ -3 < e^x \quad \text{e} \quad e^x < 11 \right\}$$

La disequazione $e^x > -3$ è sempre verificata perché e^x è sempre positivo. Visto che $e > 1$, allora la disequazione $e^x < 11$ equivale alla disequazione

$$x < \log_e 11 = ln(11)$$

Quindi la soluzione dell'esercizio è $x < ln(11)$.

Es 7
$$\log_5(2x) - \log_5(x^2 - 3) \geq 0$$

A) la condizione di esistenza sul primo logaritmo è $2x > 0$, quindi $x > 0$.

B) la condizione di esistenza sul secondo logaritmo è $x^2 - 3 > 0$, quindi $x < -\sqrt{3}$ oppure $x > \sqrt{3}$.

Mettendo a sistema le condizioni A) e B) otteniamo che la condizione di esistenza è

$$x > \sqrt{3}.$$

Ora procediamo con i calcoli. La disequazione di partenza è equivalente a

$$\log_5(2x) \geq \log_5(x^2 - 3)$$

Visto che 5 è maggiore di 1, la disequazione sopra è equivalente a

$$2x \geq x^2 - 3$$

cioè

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

Visto che $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, allora $x^2 - 2x - 3$ è:

- positivo per $x < -1$ e $x > 3$
- negativo per $-1 < x < 3$
- zero per $x = -1$ e $x = 3$.

Visto che stiamo considerando il caso ≤ 0, allora la soluzione sarebbe

$$-1 \leq x \leq 3.$$

Mettendo assieme alle condizioni di esistenza ($x > \sqrt{3}$), otteniamo la soluzione

$$\sqrt{3} < x \leq 3.$$

Es 8 $$\log_{1/2}\left(\log_5(x^2 - 17)\right) < -1$$

Prima di tutto, consideriamo le condizioni di esistenza dei 2 logaritmi.

A) il logaritmo interno è ben definito se e solo se $x^2 - 17 > 0$, cioè se e solo se $x < -\sqrt{17}$ oppure $x > \sqrt{17}$.

B) il logaritmo esterno é ben definito se e solo se il suo argomento è positivo, cioè se e solo se

$$\log_5(x^2 - 17) > 0 = \log_5(5^0) = \log_5 1$$

Questo è equivalente a imporre

$$x^2 - 17 > 1$$

cioè $x^2 - 18 > 0$, cioè $x < -3\sqrt{2}$ oppure $x > 3\sqrt{2}$.

Mettendo a sistema le condizioni di A) e quelle di B), otteniamo che le condizioni di esistenza sono

$$x < -3\sqrt{2} \quad \text{oppure} \quad x > 3\sqrt{2}.$$

Ora cominciamo i calcoli veri e propri. Vogliamo avere a destra e a sinistra lo stesso termine "esterno" scritto come $\log_{1/2}(-)$ (così poi possiamo rimuoverlo). Sappiamo che

$$-1 = \log_{1/2} 2$$

perché $(1/2)^{-1} = 2$. Quindi la disequazione di partenza è equivalente a

$$\log_{1/2}\left(\log_5(x^2 - 17)\right) < \log_{1/2} 2$$

Visto che 1/2 é **MINORE** di 1, allora possiamo togliere da destra e da sinistra i logaritmi in base 1/2 solo a patto di rovesciare il verso della disequazione. Quindi otteniamo

$$\log_5(x^2 - 17) > 2$$

Scriviamo 2 come $\log_5 25$. Visto che 5 è maggiore di 1, la disequazione precedente diventa

$$x^2 - 17 > 25$$

cioè $x^2 - 42 > 0$. Questo è equivalente a $x < -\sqrt{42}$ oppure $x > \sqrt{42}$. Entrambi questi intervalli sono contenuti nel dominio di esistenza trovato prima. Quindi la soluzione dell'esercizio è:

$$x < -\sqrt{42} \quad \text{oppure} \quad x > \sqrt{42}.$$