

Anno Scolastico 2014/15 - Classe 4B
Verifica di matematica del 5 Maggio 2015

Q1 - Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$a) \quad y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}$$

Il denominatore impone che sia $x^2 \neq 0$, cioè $x \neq 0$. La presenza della radice quadrata impone che $4 - x^2$ sia ≥ 0 . Le soluzioni di $4 - x^2 = 0$ sono $x = 2$ e $x = -2$. Il segno della funzione $f(x) = 4 - x^2$ è negativo per $x < -2$ e $x > 2$, positivo per $-2 < x < 2$. Anche i punti in cui $4 - x^2$ è zero sono accettabili, quindi deve essere $-2 \leq x \leq 2$. Considerando anche la condizione sul denominatore, il dominio è dato da

$$-2 \leq x < 0 \quad \text{oppure} \quad 0 < x < 2.$$

$$b) \quad y = 2\pi + \sqrt[3]{x + 3} - 3^x + \ln(x^2 + 1).$$

La radice cubica è ben definita sia per numeri positivi, sia per numeri negativi, quindi non crea problemi per il dominio di y . La funzione 3^x è ben definita per ogni valore di x . La quantità $x^2 + 1$ è sempre ≥ 1 ; in particolare è sempre positiva, quindi il suo logaritmo (naturale) è ben definito per ogni valore di x . Quindi il dominio di y coincide con l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali.

Q2 - Determinare gli asintoti della funzione

$$y = \frac{2x^2 - 1}{1 - x}.$$

Consideriamo prima di tutto il dominio della funzione. L'unico problema è dato dal denominatore della frazione, che impone $1 - x \neq 0$, ovvero $x \neq 1$. Tranne per $x = 1$, per ogni altro valore x la funzione $y(x)$ è continua in x , quindi l'unico asintoto verticale è in corrispondenza di $x = 1$. Per tale valore abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - x} = +\infty.$$

Quindi la retta $x = 1$ è un asintoto verticale. Gli altri eventuali asintoti sono orizzontali o obliqui. Verifichiamo se esiste un asintoto orizzontale a destra. Dobbiamo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} = -\infty$$

Quindi non esiste un asintoto orizzontale a destra. Cerchiamo allora se esiste un asintoto obliquo a destra. Dobbiamo calcolare:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{-x^2 + x} = -2$$

Visto che il limite **esiste** ed è **finito**, allora la funzione ha un asintoto obliquo a destra, dato dalla retta

$$y = mx + q = -2x + q,$$

dove il parametro q è calcolato come

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} + 2x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1 + 2x - 2x^2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{-x + 1} = -2 \end{aligned}$$

Quindi l'asintoto obliquo a destra esiste ed ha equazione

$$y = -2x - 2.$$

Non esiste un asintoto orizzontale a sinistra perché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} = +\infty$$

Invece esiste un asintoto obliquo a sinistra perché esiste (ed è finito) il limite

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{-x^2 + x} = -2$$

In questo caso, dobbiamo calcolare il coefficiente q così:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{1 - x} + 2x = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1 + 2x - 2x^2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{-x + 1} = -2 \end{aligned}$$

Dunque la retta

$$y = -2x - 2$$

è anche un asintoto obliquo a sinistra per la funzione.

Q3 - Determinare gli intervalli dove le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti e gli eventuali punti di massimo o minimo relativo o flessi a tangente orizzontale:

$$a) \quad y = x^3 - 2x^2$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = 3x^2 - 4x$$

e imponiamo $y' = 0$ per trovare i punti di massimo o minimo relativo o flessi orizzontali. Otteniamo:

$$3x^2 - 4x = 0$$

Questo è equivalente a:

$$x(3x - 4) = 0$$

Quindi $x = 0$ oppure $x = 4/3$. Questi 2 valori a priori possono corrispondere a massimi, minimi o punti di flesso. Per capire in quale caso siamo, dobbiamo studiare la crescita di y . Questa informazione si ricava dal segno della derivata y' . Dobbiamo cioè studiare la disequazione

$$x(3x - 4) > 0$$

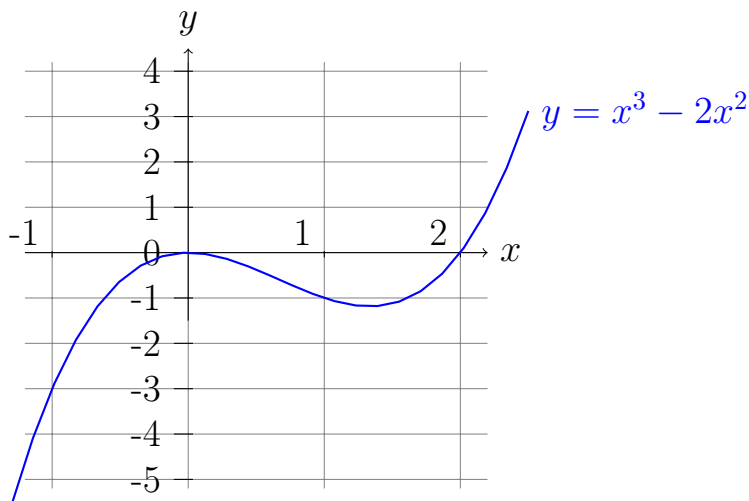
Questa disequazione ha come soluzione

$$x < 0 \quad \text{oppure} \quad x > 4/3$$

Quindi la funzione y è:

- (1) crescente per $x < 0$
- (2) decrescente per $0 < x < 4/3$
- (3) crescente per $x > 4/3$.

(1) e (2) implicano che $x = 0$ è un punto di massimo relativo. (2) e (3) implicano che $x = 4/3$ è un punto di minimo relativo. Abbiamo esaurito tutti i possibili casi in cui $y' = 0$; quindi ci sono solo un massimo relativo per $x = 0$ e un minimo relativo per $x = 4/3$. Il grafico della funzione (che non era richiesto di disegnare) ha questo andamento:



$$b) \quad y = x - \frac{2}{x}.$$

La funzione ha come dominio di definizione $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si può riscrivere come

$$y = x - 2x^{-1}$$

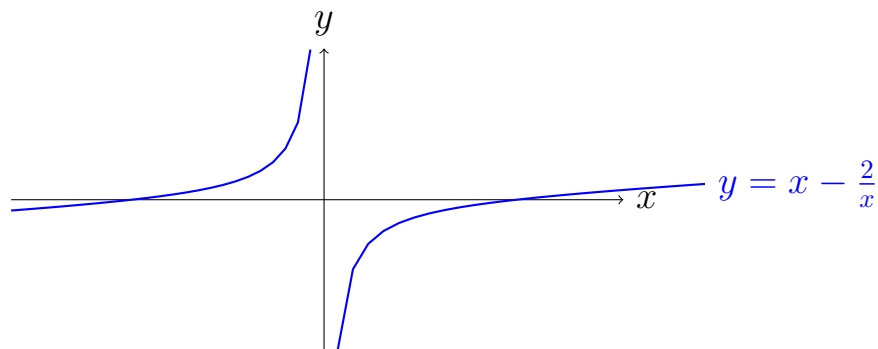
Dunque

$$y' = 1 - 2(x^{-1})' = 1 - 2 \cdot (-x^{-2}) = 1 + 2x^{-2}$$

Quindi i massimi, minimi o flessi orizzontali di y si trovano imponendo $1 + 2x^{-2} = 0$. Possiamo moltiplicare questa equazione per x^2 (perché x^2 non è zero visto che siamo nel dominio della funzione $y(x)$). Quindi otteniamo che i massimi, minimi o flessi orizzontali si ottengono imponendo

$$x^2 + 2 = 0$$

La quantità $x^2 + 2$ è sempre maggiore o uguale a 2. In particolare, non è mai zero, quindi l'equazione precedente non ha soluzioni. Quindi non esistono massimi o minimi relativi o flessi orizzontali. La funzione y' è sempre positiva (sommiamo 1 ed una quantità che è un quadrato). Quindi la funzione y è sempre crescente sul suo dominio di definizione. Quindi è crescente per $x < 0$ ed è ancora crescente per $x > 0$ (in $x = 0$ ha un asintoto verticale). Il grafico della funzione (che non era richiesto di disegnare) ha questo andamento:



Q4 - Fare lo studio (dominio, parità, intersezione con gli assi, segno, asintoti, crescita, punti stazionari, flessi) della seguente funzione:

$$y = \frac{1 - x^2}{x^2}.$$

Poi farne la rappresentazione grafica.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Su tale dominio si può riscrivere come

$$y = x^{-2} - 1$$

Se sostituiamo x con $-x$ nella definizione di y otteniamo ancora la stessa espressione, quindi la funzione y è pari. Dunque il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'asse y .

Non esiste l'intersezione del grafico con l'asse y ($x = 0$ è escluso dal dominio), quindi dobbiamo calcolare solo le intersezioni con l'asse x . Queste sono date da

$$x^{-2} - 1 = 0$$

Visto che $x = 0$ è escluso dal dominio, possiamo moltiplicare la precedente identità per $x^2 \neq 0$, quindi otteniamo

$$1 - x^2 = 0$$

Questa equazione ha come soluzioni $x = -1$ e $x = 1$. Quindi l'intersezione con l'asse x è data dai punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

Ora studiamo il segno di y . Quindi dobbiamo considerare la disequazione:

$$x^{-2} - 1 > 0$$

Visto che x^2 è sempre > 0 sul dominio di definizione di y , allora la precedente disequazione è equivalente a:

$$x^2(x^{-2} - 1) > x^2 \cdot 0$$

che è equivalente a:

$$1 - x^2 > 0.$$

Quest'ultima disequazione ha come soluzione:

$$-1 < x < 1$$

Considerando il fatto che $x = 0$ non appartiene al dominio di y , concludiamo che la funzione y è:

- negativa per $x < -1$
- positiva per $-1 < x < 0$
- positiva per $0 < x < 1$
- negativa per $x > 1$

(notare che questo risultato concorda con il fatto che la funzione y è simmetrica rispetto all'asse y , cosa che sappiamo già).

Cerchiamo gli asintoti. L'unico verticale può essere solo in $x = 0$ (l'unico punto escluso dal dominio di y e per il quale y non sia continua). Per tale valore abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x^2}{x^2} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - x^2}{x^2} = +\infty.$$

Quindi l'asse y ($x = 0$) è un asintoto verticale.

Verifichiamo se esiste un asintoto orizzontale a destra. Dobbiamo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1$$

Quindi esiste un asintoto orizzontale a destra, dato dalla retta $y = -1$ (quindi in particolare non esistono asintoti obliqui a destra). Allo stesso modo, visto che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1,$$

allora esiste un asintoto orizzontale a sinistra, dato ancora dalla retta $y = -1$.

Calcoliamo ora la derivata prima di $y = x^{-2} - 1$:

$$y' = -2x^{-3}$$

Quindi la funzione y' è:

- positiva per $x < 0$;
- negativa per $x > 0$

(non è definita per $x = 0$, ma questo non è un problema visto che $x = 0$ non è un punto del dominio di y). Quindi la funzione y è:

(1) crescente per $x < 0$;

(2) decrescente per $x > 0$.

Guardando (1) e (2) si può essere tentati di concludere che $x = 0$ sia un punto di massimo per la funzione y . Questo è sbagliato perché $x = 0$ è escluso dal dominio di y .

In particolare, non esistono massimi o minimi relativi, e non esistono flessi orizzontali per y .

A questo punto siamo pronti per disegnare un grafico per y :

