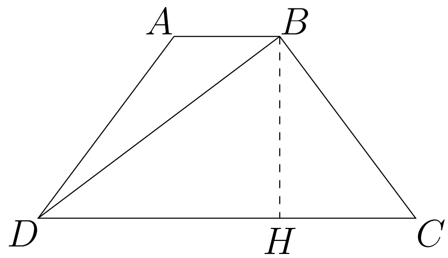
Anno Scolastico 2014/15 - **Classe 2D**
Soluzioni della verifica di matematica del 20 Maggio 2015

Es 1 - In un trapezio isoscele $ABCD$ la diagonale BD è perpendicolare al lato obliquo BC. Sia BH l'altezza tracciata da B sulla base CD. Il prodotto del lato obliquo e dell'altezza è $180\,cm^2$. Inoltre il lato obliquo supera l'altezza di $3\,cm$.

(a) Calcola la misura di BC, BH e CH.
(b) Calcola la misura di DH.
(c) Usa i risultati precedenti per trovare la misura di CD e di AB.



Prima di tutto chiamiamo x la misura di BH. In questo modo abbiamo:

$$BC \cdot x = 180,$$

quindi

$$BC = \frac{180}{x}.$$

Inoltre sappiamo anche che

$$BC = x + 3.$$

Dalle due identità precedenti otteniamo

$$\frac{180}{x} = x + 3$$

quindi

$$180 = x(x+3) \qquad 180 = x^2 + 3x,$$

quindi

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

Cerchiamo le soluzioni di questa equazione di secondo grado:

$$\Delta = 3^2 + 4 \cdot 180 = 9 + 720 = 729 = 27^2.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 27}{2}$$

quindi

$$x_1 = \frac{-3-27}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$

e

$$x_2 = \frac{-3+27}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

La soluzione x_1 non è accettabile perché è negativa (stiamo cercando la lunghezza di un segmento, quindi un numero non negativo). Quindi l'unica soluzione è la soluzione 12. Quindi concludiamo che

$$BH = x = 12\,cm.$$

Inoltre abbiamo

$$BC = x + 3 = 15\,cm$$

(avremmo ottenuto gli stessi risultati ponendo $BC = y$ e svolgendo tutti i calcoli per trovare y. In questo caso i 2 valori ottenuti per y sarebbero stati $y_1 = -12$ e $y_2 = 15$; il primo non è accettabile, il secondo invece sì).

Dato che il triangolo BHC è rettangolo per ipotesi, allora usando il teorema di Pitagora abbiamo:

$$CH = \sqrt{(BC)^2 - (BH)^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot 4^2} =$$
$$= \sqrt{3^2 \cdot (5^2 - 4^2)} = 3 \cdot \sqrt{25 - 16} = 3 \cdot 3 = 9\,cm.$$

(b) Usiamo il secondo teorema di Euclide sul triangolo rettangolo BDC, quindi abbiamo:

$$DH : BH = BH : CH,$$

quindi

$$DH \cdot CH = BH \cdot BH,$$

quindi

$$DH = \frac{BH \cdot BH}{CH} = \frac{12 \cdot 12}{9} = 4 \cdot 4 = 16\,cm.$$

(c) La base maggiore è data da:

$$CD = CH + DH = 9 + 16 = 25\,cm.$$

Visto che il trapezio è isoscele, sappiamo che

$$CD = AB + 2 \cdot CH.$$

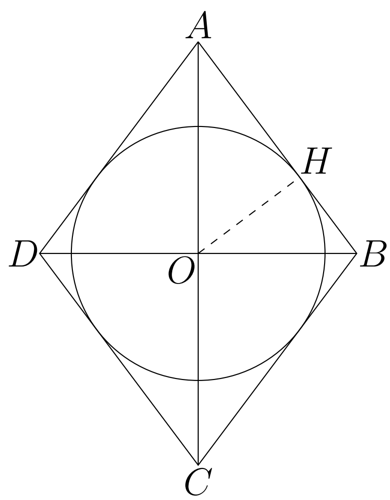
Sostituendo i dati che conosciamo, abbiamo:

$$25 = AB + 2 \cdot 9 \qquad 25 = AB + 18,$$

quindi

$$AB = 25 - 18 = 7\,cm.$$

Es 2 - Considera un rombo $ABCD$, con centro in O. La diagonale AC misura $56\,cm$. Il perimetro misura $140\,cm$.



(a) Determina l'area del rombo.
(b) Considera la circonferenza iscritta nel rombo (con centro in O). Chiama H il punto di intersezione tra il lato AB e la circonferenza. Determina le lunghezze dei segmenti AH e HB.
(c) Calcola il raggio della circonferenza.

(a) Visto che O è l'intersezione delle diagonali del rombo, allora il segmento AO misura

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{56}{2} = 28\,cm.$$

Inoltre, visto che il perimetro del rombo è 140, allora il lato AB misura

$$AB = \frac{140}{4} = 35\,cm.$$

Usiamo il teorema di Pitagora per determinare la lunghezza del segmento BO:

$$BO = \sqrt{(AB)^2 - (AO)^2} = \sqrt{35^2 - 28^2} = \sqrt{7^2 \cdot 5^2 - 7^2 \cdot 4^2} =$$
$$= \sqrt{7^2 \cdot (5^2 - 4^2)} = 7 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2} = 7 \cdot \sqrt{9} = 7 \cdot 3 = 21\, cm.$$

Dunque la diagonale BD misura

$$BD = 2 \cdot BO = 2 \cdot 21 = 42\, cm.$$

Quindi l'area del rombo si calcola come:

$$\text{Area} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{56 \cdot 42}{2} = 28 \cdot 42 = 1176\, cm^2.$$

(b) Il cerchio è tangente al segmento AB, quindi il raggio OH è perpendicolare al segmento AB. Prima di tutto calcoliamo la misura di AH usando il primo teorema di Euclide sul triangolo OAB:

$$AB : AO = AO : AH.$$

Quindi

$$AH \cdot AB = AO \cdot AO,$$

quindi

$$AH = \frac{AO \cdot AO}{AB} = \frac{28 \cdot 28}{35} = \frac{4 \cdot 28}{5} = \frac{112}{5} = 22,4\, cm.$$

Quindi possiamo calcolare la misura di BH così:

$$BH = AB - AH = 35 - 22,4 = 12,6\, cm$$

(in alternativa, potevamo usare una seconda volta il teorema di Euclide sul triangolo OAB).

(c) Ora usiamo il secondo teorema di Euclide sul triangolo OAB:

$$AH : OH = OH : HB.$$

Quindi:

$$(OH)^2 = AH \cdot HB.$$

Quindi troviamo il raggio della circonferenza così:

$$OH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{22,4 \cdot 12,6} = \sqrt{282,24} = 16,8\, cm.$$