Anno Scolastico 2014/15 - **Classe 1D**

**Verifica di matematica dell'11 Maggio 2015 - Soluzioni degli esercizi**

Risolvere le seguenti equazioni. Dove è necessario, scrivere le condizioni di accettabilità e usarle per verificare se le soluzioni trovate sono accettabili oppure no.

**Es 1**

$$2(x-2)-2(x-1)+2=3x$$

$$2x-4-2x+2+2=3x$$

Semplifichiamo i termini uguali con il primo principio di equivalenza.

$$0=3x$$

Dividiamo per 3 utilizzando il secondo principio di equivalenza.

$$x=0$$

Come verifica, possiamo sostituire $x=0$ nell'equazione di partenza, e verificare che otteniamo un'identità.

**Es 2**

$$(x+1)(x-1)=(x+1)^2$$

Usiamo le formule note del tipo $(a-b)(a+b)$ e del tipo $(a+b)^2$, quindi otteniamo:

$$x^2-1=x^2+2x+1$$

Semplifichiamo i termini uguali con il primo principio di equivalenza.

$$-1=2x+1$$

$$2x=-2$$

Dividiamo per 2 utilizzando il secondo principio di equivalenza.

$$x=-1$$

**Es 3**

$$\frac{x}{2}-\frac{x-3}{4}=-\frac{1}{12}$$

Prima di tutto, mettiamo tutto a minimo comune multiplo (12 nel caso in questione):

$$\frac{6x-3(x-3)}{12}=-\frac{1}{12}$$

Moltiplichiamo per 12 utilizzando il secondo principio di equivalenza:

$$6x - 3x + 9 = -1$$

$$3x = -10$$

$$x = -\frac{10}{3}$$

**Es 4**
$$\frac{3+x}{1-x} = 3$$

Questo è il primo caso in cui dobbiamo considerare le condizioni di accettabilità (condizioni di esistenza) perché l'incognita $x$ compare anche al denominatore. In particolare, dobbiamo imporre che $1 - x \neq 0$, ovvero che

$$x \neq 1$$

(per tale valore, otterremmo 0 al denominatore).

Ora mettiamo tutto a minimo comun multiplo. che è $1 - x$ in questo caso. Quindi otteniamo:

$$\frac{3+x}{1-x} = \frac{3(1-x)}{1-x}$$

Ora moltiplichiamo per $1 - x$ usando il secondo principio di equivalenza. Possiamo farlo grazie alle condizioni di accettabilità (si può moltiplicare o dividere a destra e sinistra per un termine **diverso da zero**). Poi continuiamo così:

$$\begin{gathered} 3 + x = 3 - 3x \\ x = -3x \\ 4x = 0 \\ x = 0 \end{gathered}$$

La soluzione finale $x = 0$ soddisfa le condizioni di accettabilità, quindi è veramente una soluzione del problema.

**Es 5**
$$\frac{2x-2}{x^2-x} = \frac{3}{2x} + \frac{x}{x^2+x}$$

Anche qui l'incognita $x$ compare al denominatore, quindi prima di tutto bisogna trovare le condizioni di accettabilità. Per trovarle, consideriamo separatamente i 3 denominatori.

A) $x^2 - x = x(x-1)$, quindi bisogna imporre che $x(x-1) \neq 0$. Questo vuole dire imporre le 2 condizioni:

$$x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 1.$$

B) dobbiamo imporre che $2x \neq 0$, quindi che

$$x \neq 0$$

C) dobbiamo imporre che $x^2 + x \neq 0$. Visto che $x^2 + x = x(x+1)$, allora dobbiamo imporre che

$$x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq -1.$$

Mettendo assieme tutte le condizioni A), B) e C), le condizioni di accettabilità sono

$$x \neq -1 \quad \text{e} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 1$$

ovvero

$$x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$$

Ora possiamo svolgere i calcoli. Prima di tutto, consideriamo separatamente ogni frazione e cerchiamo di semplificarla se possibile. La prima frazione si semplifica:

$$\frac{2x-2}{x^2-x} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2}{x}$$

La seconda frazione non si semplifica. La terza si semplifica così:

$$\frac{x}{x^2+x} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

Quindi l'equazione di partenza è equivalente a:

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{2x} + \frac{1}{x+1}$$

Il minimo comune multiplo è $2x(x+1)$, quindi otteniamo

$$\frac{4(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{3(x+1)+2x}{2x(x+1)}$$

Ora possiamo moltiplicare per $2x(x+1)$ a destra e a sinistra (secondo principio di equivalenza) perché $2x(x+1)$ non è zero (grazie alle condizioni di accettabilità).

$$4(x+1) = 3(x+1) + 2x$$
$$4x + 4 = 3x + 3 + 2x$$
$$1 = x$$

La soluzione $x = 1$ non è accettabile per le condizioni di accettabilità che abbiamo scritto prima. Quindi non esistono soluzioni (cioé l'insieme delle soluzioni è vuoto).

**Es 6** $$11 + (5x-1)(1-5x) + 1 = (1+5x)(1-5x)$$

Osserviamo che

$$(5x-1)(1-5x) = -(5x-1)(5x-1) = -(5x-1)^2 =$$
$$-(25x^2 - 10x + 1) = -25x^2 + 10x - 1$$

e che

$$(1+5x)(1-5x) = 1 - 25x^2$$

Quindi l'equazione di partenza è equivalente a:

$$11 - 25x^2 + 10x - 1 + 1 = 1 - 25x^2$$

Eliminiamo i termini uguali ($1$ e $-25x^2$) a destra e sinistra (primo principio di equivalenza) e otteniamo:

$$11 + 10x - 1 = 0$$

Quindi

$$10x = 10$$

$$x = 1$$

Semplificare le seguenti espressioni:

**Es 7** $$\frac{2a^2}{a^2-1} - \frac{2a}{2a+2}$$

$$\frac{2a^2}{a^2-1} - \frac{2a}{2a+2} = \frac{2a^2}{(a-1)(a+1)} - \frac{a}{a+1} = \frac{2a^2 - a(a-1)}{(a-1)(a+1)} =$$
$$= \frac{2a^2 - a^2 + a}{(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+a}{(a-1)(a+1)} = \frac{a(a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a}{a-1}$$

**Es 8**
$$(x+1) : \left(\frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1+x+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{1-2x+x^2}{1+x}\right)$$

Usiamo la formula per la differenza di cubi, la formula per la differenza di quadrati e la formula per il quadrato del binomio, che ci danno:
A) $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$
B) $1-x^2=(1-x)(1+x)$
c) $1-2x-x^2=(1-x)^2$. Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}
(x+1) : \left(\frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1+x+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{1-2x+x^2}{1+x}\right) &= \\
= (x+1) : \left(\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} \cdot \frac{1+x+x^2}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(1-x)^2}{1+x}\right) &= \\
= (x+1) : \frac{1}{(1-x)^2} = (x+1)\cdot(1-x)^2 = (x+1)(x-1)^2
\end{aligned}$$

**Es 9**
$$\left(1-\frac{2y}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-2y}{2y} - \frac{x^2}{2xy-4y^2} - \frac{2x}{2y-x}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{2y}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-2y}{2y} - \frac{x^2}{2xy-4y^2} - \frac{2x}{2y-x}\right)^2 &= \\
= \left(\frac{x-2y}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-2y}{2y} - \frac{x^2}{2y(x-2y)} + \frac{2x}{x-2y}\right)^2 &= \\
= \frac{(x-2y)^2}{x^2} \cdot \left(\frac{(x-2y)^2 - x^2 + 4xy}{2y(x-2y)}\right)^2 &= \\
= \frac{(x-2y)^2}{x^2} \cdot \left(\frac{x^2-4xy+4y^2-x^2+4xy}{2y(x-2y)}\right)^2 &= \\
= \frac{(x-2y)^2}{x^2} \cdot \left(\frac{4y^2}{2y(x-2y)}\right)^2 = \frac{(x-2y)^2}{x^2} \cdot \left(\frac{2y}{x-2y}\right)^2 &= \\
= \frac{(x-2y)^2}{x^2} \cdot \frac{4y^2}{(x-2y)^2} = \frac{4y^2}{x^2} = \left(\frac{2y}{x}\right)^2
\end{aligned}$$

**Es 10** Risolvi la seguente equazione (dove $x$ è l'incognita e $a$ è un parametro)

$$(a^2-9)x = 2a+6$$

Il termine $(a^2-9)$ moltiplica $x$. Dobbiamo considerare separatamente quando questo termine è diverso da zero e quando è uguale a zero. Sappiamo che $a^2 - 9 = 0$ se e solo se $a = -3$ oppure $a = 3$, quindi abbiamo 3 casi da discutere separatamente:

(A) il caso in cui $a = -3$,

(B) il caso in cui $a = 3$,

(C) il caso in cui $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, +3\}$ (qualunque numero reale diverso da $-3$ e da 3.

CASO (A). In questo caso sostituisco dovunque al posto di $a$ il numero $-3$. Quindi ottengo:

$$(9-9)x = -6+6$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$0 = 0$$

Quest'ultima equazione è indeterminata, quindi ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ la verifica. Quindi la soluzione nel caso (A) è data dall'insieme di tutti i numeri reali.

CASO (B). In questo caso sostituisco dovunque al posto di $a$ il numero 3. Quindi ottengo:

$$(9-9)x = 6+6$$

$$0 \cdot x = 12$$

$$0 = 12$$

Quest'ultima equazione è impossibile, quindi non esiste nessun valore di $x \in \mathbb{R}$ che la verifica. Quindi la soluzione nel caso (A) è data dall'insieme vuoto.

CASO (C). In questo caso non sappiamo il valore esatto di $a$ (sappiamo solo che non è $-3$ o 3, ma può essere un qualunque altro numero reale). La cosa importante però è che in questo caso $a^2-9$ non è zero. Quindi uso il secondo principio di equivalenza per dividere a destra e a sinistra per $a^2-9$. Ottengo:

$$(a^2-9)x = 2a+6$$

$$x = \frac{2a+6}{a^2-9}$$

$$x = \frac{2(a+3)}{(a-3)(a+3)}$$

$$x = \frac{2}{a-3}$$

Quindi in questo caso esiste una sola soluzione, data da $2/(a-3)$ (la soluzione dipende dal parametro $a$, ma questo non è un problema. Nella maggior parte dei problemi di questo tipo la soluzione dipende dal parametro).

In sintesi:

(A) se $a = -3$, allora ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione

(B) se $a = 3$, allora non esistono soluzioni dell'equazione

(C) se $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-3, 3\}$, allora esiste una sola soluzione data da $x = 2/(a-3)$.