ANALYSE 3B - TRAVAUX DIRIGÉS
CHAPITRE 6 - TRANSFORMÉE DE LAPLACE

MATTEO TOMMASINI

Si vous trouvez des erreurs de français (très probable) ou de mathématiques (moins improbable, mais pas impossible), dite-le-moi, merci!

Exercice 3.1(1) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside*

$$H(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \infty[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et préciser son domaine de définition (l'ensemble des s pour lesquels l'intégrale qui définit la transformée de Laplace converge).

Pour tout $s \in \mathbb{C}$, si la quantité $\mathcal{L}(H)(s)$ est bien définie, alors elle est égale à:

$$\mathcal{L}(H)(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{dt} = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{dt}\,.$$

(A) Si $s = 0$, alors on a $\mathcal{L}(H)(s) = +\infty$, donc $\mathcal{L}(H)(s)$ n'est pas bien définie pour $s = 0$.

(B) Si $s \neq 0$ et si $\mathcal{L}(H)(s)$ est bien définie, alors on a:

$$\mathcal{L}(H)(s) = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\lim_{t\to+\infty} e^{-st}.$$

Donc on doit considérer 3 cas comme suit.

(B1) Si $s = x + iy$ avec $x = 0$ et $y \neq 0$, alors on a

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st} = \lim_{t\to+\infty} e^{-iyt}$$

mais cette limite n'existe pas, donc $\mathcal{L}(H)(s)$ n'est pas bien définie.

(B2) Si $s = x + iy$ avec $x < 0$ (et y quelconque), alors on a:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st} = \lim_{t\to+\infty} e^{-xt}e^{-iyt},$$

donc cette limite n'existe pas (si $y \neq 0$) ou elle est $+\infty$ (si $y = 0$). Donc $\mathcal{L}(H)(s)$ n'est pas bien définie.

(B3) Si $s = x + iy$ avec $x > 0$ (et y quelconque), alors on a:

$$\lim_{t\to+\infty} |e^{-st}| = \lim_{t\to+\infty} |e^{-xt}e^{-iyt}| = \lim_{t\to+\infty} e^{-xt} = 0,$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st} = 0,$$

Date: December 11, 2014.

donc $\mathcal{L}(H)(s)$ est bien définie et on a:

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot 0 = \frac{1}{s}.$$

Donc le domaine de définition de $\mathcal{L}(H)$ est $D := \{s = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x > 0\}$. Pour tout $s \in D$ on a $\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}$.

Exercice 3.1(2) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = t^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et préciser son domaine de définition.*

Pour tout $s \in \mathbb{C}$, si la quantité $\mathcal{L}(f)(s)$ est bien définie, alors elle est égale à:

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty t^n e^{-st} \,\mathrm{dt}\,.$$

(A) Si $s = 0$, on a:

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} \,\mathrm{dt} = \int_0^\infty t^n \,\mathrm{dt} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = +\infty,$$

donc $\mathcal{L}(f)(0)$ n'est pas bien définie.

(B) Si $s \neq 0$, alors en intégrant par parties on a:

$$\mathcal{L}(t^n)(s) := \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} \,\mathrm{dt} = \left[\frac{t^n e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{n t^{n-1} e^{-st}}{-s} \,\mathrm{dt} =$$
$$= \left[-\frac{t^n e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \cdot \mathcal{L}(t^{n-1})(s).$$

Donc on a:

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \left[-\frac{t^n e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \cdot \left(\left[-\frac{t^{n-1} e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{s} \cdot \mathcal{L}(t^{n-2})(s) \right) =$$
$$= \left[-e^{-st} \left(\frac{t^n}{s} + \frac{n t^{n-1}}{s^2}\right)\right]_0^{\infty} + \frac{n(n-1)}{s^2} \cdot \mathcal{L}(t^{n-2})(s).$$

Par induction, si $\mathcal{L}(t^n)(s)$ est bien définie, alors on a:

$$\mathcal{L}(t^n)(s) =$$
$$= \left[-e^{-st} \left(\frac{t^n}{s} + \frac{n t^{n-1}}{s^2} + \frac{n(n-1)t^{n-2}}{s^3} + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3t^2}{s^{n-1}} + \frac{n!t}{s^n} + \frac{n!}{s^{n+1}}\right)\right]_0^{+\infty}.$$

Pour simplicité on pose

$$F(s,t) := -e^{-st} \left(\frac{t^n}{s} + \frac{n t^{n-1}}{s^2} + \frac{n(n-1)t^{n-2}}{s^3} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3t^2}{s^{n-1}} + \frac{n!t}{s^n} + \frac{n!}{s^{n+1}}\right).$$

Donc si $\mathcal{L}(t^n)(s)$ est bien définie, alors on a:

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \left(\lim_{t\to+\infty} F(s,t)\right) - F(s,0) = \left(\lim_{t\to+\infty} F(s,t)\right) + \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Maintenant on considère 3 cas comme suit.

(B1) On suppose que $s = x + iy$ avec $x < 0$ (et y quelconque). On rappelle que si on fixe $u, v \in \mathbb{C}$, alors on a: $|u+v| \le |u| + |v|$. Si on prend $u := A_1 + A_2$ et $v := -A_2$, ça implique que

$$|A_1| = |A_1 + A_2 - A_2| \le |A_1 + A_2| + |-A_2| = |A_1 + A_2| + |A_2| \qquad \forall\, A_1, A_2 \in \mathbb{C},$$

donc

$$|A_1 + A_2| \ge |A_1| - |A_2| \qquad \forall\, A_1, A_2 \in \mathbb{C},$$

Plus en général, on a:

$$|A_1 + A_2 + \cdots + A_n| \ge |A_1| - |A_2| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_n| \qquad \forall\, A_1, \cdots, A_n \in \mathbb{C}.$$

Donc on a:

$$|F(s,t)| \ge e^{-xt}\left(\left|\frac{t^n}{s}\right| - \left|\frac{nt^{n-1}}{s^2}\right| + \cdots + (-1)^{n+2}\left|\frac{n!}{s^{n+1}}\right|\right) =$$

$$= e^{-xt}\left(\frac{t^n}{|s|} - \frac{nt^{n-1}}{|s|^2} + \cdots + (-1)^{n+2}\frac{n!}{|s|^{n+1}}\right),$$

Vu que $x < 0$, alors on a

$$\lim_{t\to+\infty} |F(s,t)| = +\infty,$$

donc la quantité $\lim_{t\to+\infty} F(s,t)$ (si elle existe) n'est pas une valeur finie, donc $\mathcal{L}(t^n)(s)$ n'est pas bien définie.

(B2) Maintenant on suppose que $s = x + iy$ avec $x = 0$ et $y \neq 0$. Alors on a

$$|F(s,t)| \ge \frac{t^n}{|s|} - \frac{nt^{n-1}}{|s|^2} + \cdots + (-1)^{n+2}\frac{n!}{|s|^{n+1}},$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty} |F(s,t)| = +\infty,$$

donc la quantité $\lim_{t\to+\infty} F(s,t)$ (si elle existe) n'est pas une valeur finie, donc $\mathcal{L}(t^n)(s)$ n'est pas bien définie.

(B3) Maintenant on suppose que $s = x + iy$ avec $x > 0$ (et y quelconque). Alors pour tout $0 = 1, \cdots, n$ on a:

$$\lim_{t\to+\infty}\left|-e^{-st}\cdot\frac{t^i}{s^{n+1-i}}\right| = \frac{1}{|s|^{n+1-i}}\cdot\lim_{t\to+\infty}(e^{-xt}\cdot t^i) = 0,$$

donc on a:

$$\lim_{t\to+\infty} -e^{-st}\cdot\frac{t^i}{s^{n+1-i}} = 0,$$

donc $\lim_{t\to+\infty} F(s,t) = 0$, donc $\mathcal{L}(t^n)(s)$ est bien définie et on a:

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = 0 + \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

On pouvait obtenir le même résultat en appliquant la Proposition 2.3 du Chapitre 6, avec $f(t) := 1$ pour tout $t \in [0, \infty[$.

Exercice 3.1(3) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{at}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et préciser son domaine de définition.*

Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{L}(e^{at})(s)$ est bien définie, on a:

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\,\mathrm{dt} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,\mathrm{dt} = \mathcal{L}(H)(s-a)$$

où H est la fonction de Heaviside (voir Exercice 3.1(1)). Donc en appliquant l'Exercice 3.1(1), $\mathcal{L}(e^{at})(s)$ est bien définie si et seulement si

$$s \in D_a := \{s = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x > a\}.$$

Pour tout $s \in D_a$, on a:

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \mathcal{L}(H)(s-a) = \frac{1}{s-a}.$$

Exercice 3.1(4) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^n e^{at}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$, et préciser son domaine de définition.*

(A) Si $n = 0$, en appliquant l'Exercice 3.1(3) on a

$$\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(e^{at})(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & \text{si } s = x + iy \text{ et } x > a \\ \text{non definie} & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(B) Si $n > 0$, on pose $f(t) := e^{at}$. En appliquant (A) et la Proposition 2.3 du Chapitre 6, on a:

$$\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial^n s} \mathcal{L}(f(t))(s) =$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial^n s}\left(\frac{1}{s-a}\right) = (-1)^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial^{n-1} s}\left(\frac{-1}{(s-a)^2}\right) = (-1)^n \frac{\partial^{n-2}}{\partial^{n-2} s}\left(\frac{2}{(s-a)^3}\right).$$

Par induction, pour tout $k = 1, \cdots, n$ on a:

$$\mathcal{L}(g)(s) = (-1)^n \frac{\partial^{n-k}}{\partial^{n-k} s}\left(\frac{(-1)^k k!}{(s-a)^{k+1}}\right).$$

En particulier, pour $k := n$ on a:

$$\mathcal{L}(g)(s) = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Comme dans l'Exercice 3.1(3), la transformée de Laplace est bien définie si et seulement si $s = x + iy$ avec $x > a$.

(C) Maintenant on suppose que $n < 0$. Dans ce cas, on doit écrire l'intégrale comme suit:

$$\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-(s-a)t}}{t^k}\,\mathrm{dt}$$

pour $k := -n \in \mathbb{N}$. On suppose que $s = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-(s-a)t}}{t^k}\,\mathrm{dt} = \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-(x-a)t}\cos(yt)}{t^k}\,\mathrm{dt} - i\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-(x-a)t}\sin(yt)}{t^k}\,\mathrm{dt}\,.$$

On note:

$$A(s) := \lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-(x-a)t}\cos(yt)}{t^k}\,\mathrm{dt}, \qquad B(s) := -\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-(x-a)t}\sin(yt)}{t^k}\,\mathrm{dt}\,.$$

Alors $A(s)$ et $B(s)$ sont en $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(g)(s) = A(s) + iB(s)$ est bien définie si et seulement si $A(s)$ et $B(s)$ sont bien définies (c'est-à-dire, si elles sont des quantité réelles finies).

(C1) Si $y = 0$, on a $B(s) = 0$ et

$$A(s) = \left(\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-(x-a)t}}{t^k}\,\mathrm{dt}\right) + \int_1^\infty \frac{e^{-(x-a)t}}{t^k}\,\mathrm{dt}\,.$$

Maintenant

$$\int_1^\infty \frac{e^{-(x-a)t}}{t^k}\,\mathrm{dt}$$

est une quantité finie et positive si $x \geq a$, elle est $+\infty$ si $x < a$. En plus, si $t \in [0,1]$, alors

$$e^{-(x-a)t} \geq \min\{1, e^{a-x}\} > 0,$$

donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-(x-a)t}}{t^k}\,\mathrm{dt} \geq \min\{1, e^{a-x}\}\cdot \lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^k}\,\mathrm{dt} = +\infty.$$

Donc $\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-(x-a)t}}{t^k}\,\mathrm{dt} = +\infty$, donc la quantité $A(s)$ est $+\infty$, donc $\mathcal{L}(g)(s)$ n'est pas bien définie.

(C2) Si $y > 0$,

$$A(s) = \left(\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_\varepsilon^{\pi/(4y)} \frac{e^{-(x-a)t}\cos(yt)}{t^k}\,\mathrm{dt}\right) + \int_{\pi/(4y)}^\infty \frac{e^{-(x-a)t}\cos(yt)}{t^k}\,\mathrm{dt}\,.$$

Maintenant on note $r := \min\{1, e^{-(x-a)\pi/(4y)}\} > 0$. Donc on a:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_\varepsilon^{\pi/4y} \frac{e^{-(x-a)t}\cos(yt)}{t^k}\,\mathrm{dt} \geq \\ \geq \frac{r}{\sqrt{2}}\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_\varepsilon^{\pi/4y}\frac{1}{t^k} = +\infty\end{aligned}$$

pour tout $k \geq 1$. En plus,

$$\int_{\pi/(4y)}^\infty \frac{e^{-(x-a)t}\cos(yt)}{t^k}\,\mathrm{dt}\,.$$

est une quantité finie si $x \leq a$, elle ne converge pas si $x > a$. Dans tous les deux cas, $A(s)$ n'est pas bien définie si $y > 0$, donc aussi $\mathcal{L}(g)(s)$ n'est pas bien definie dans ce cas.

(C3) Si $y < 0$, alors on a le même résultat de (C2), c'est-à-dire que $\mathcal{L}(g)(s)$ n'est pas bien définie.

Donc pour tout $n < 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{C}$ la quantité $\mathcal{L}(t^n e^{at})(s)$ n'est pas bien définie.

Exercice 3.1(5) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{at}\sin(\omega t)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$, et préciser son domaine de définition.*

Si $\mathcal{L}(e^{at}\sin(\omega t))(s)$ est bien définie, on a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at}\sin(\omega t))(s) &= \frac{1}{2i}\Big(\mathcal{L}(e^{at}e^{i\omega t})(s) - \mathcal{L}(e^{at}e^{-i\omega t})(s)\Big) = \\ &= \frac{1}{2i}\Big(\mathcal{L}(H)(s-a-i\omega) - \mathcal{L}(H)(s-a+i\omega)\Big).\end{aligned}$$

Maintenant si $s = x+iy$, alors $s-a-i\omega = (x-a)+i(y-\omega)$ et $s-a+i\omega = (x-a)+i(y+\omega)$, donc en utilisant l'Exercice 3.1(3) $\mathcal{L}(H)(s-a-i\omega)(s)$ et $\mathcal{L}(H)(s-a+i\omega)(s)$ sont bien définies si et seulement si $x > a$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i}\Big(\mathcal{L}(H)(s-a-i\omega)(s) - \mathcal{L}(s-a+i\omega)(s)\Big) = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-a-i\omega} - \frac{1}{s-a+i\omega}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{s-a+i\omega-s+a+i\omega}{(s-a)^2+\omega^2} = \\ &= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\omega}{(s-a)^2+\omega^2} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

Donc on a:

$$\mathcal{L}(e^{at}\sin(\omega t))(s) = \begin{cases} \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} & \text{si } \mathrm{Re}(s) > a \\ \text{non definie} & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

Exercice 3.1(6) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = t^n\cos(\omega t)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\omega > 0$, et préciser son domaine de définition.*

(A) On suppose que $n = 0$. Alors on a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g)(t) &= \int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-st}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}(e^{i\omega t})(s) + \mathcal{L}(e^{-i\omega t})(s)\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}(H)(s-i\omega) + \mathcal{L}(H)(s+i\omega)\Big).\end{aligned}$$

En appliquant l'Exercice 3.1(3), $\mathcal{L}(H)(s-i\omega)$ et $\mathcal{L}(H)(s+i\omega)$ sont bien définies si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > 0$. Dans ce cas, on a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}(H)(s-i\omega) + \mathcal{L}(H)(s+i\omega)\Big) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{s+i\omega+s-i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

(B) Si $n > 0$ et si $\mathcal{L}(t^n\cos(\omega t))(s)$ est bien définie, alors on a:

$$\mathcal{L}(t^n\cos(\omega t))(s) = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial^n s}\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s).$$

En appliquant (A), $\mathcal{L}(t^n \cos(\omega t))(s)$ est bien définie si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > 0$. Pour tout s tels que $\mathrm{Re}(s) > 0$ on a:

$$\mathcal{L}(t^n \cos(\omega t))(s) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial^n s} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right).$$

(C) Si $n < 0$, on pose $k := -n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{L}(t^n \cos(\omega t))(s)$ est bien définie, on a:

$$\mathcal{L}(t^n \cos(\omega t))(s) = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{t^k} \, \mathrm{dt} =$$

$$= \left(\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/(4\omega)} \frac{\cos(\omega t)}{t^k} \, \mathrm{dt} \right) + \int_{\pi/(4\omega)}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{t^k} \, \mathrm{dt}\,.$$

Maintenant la quantité

$$\int_{\pi/(4\omega)}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{t^k} \, \mathrm{dt}$$

est une quantité réelle finie, tandis que

$$\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/(4\omega)} \frac{\cos(\omega t)}{t^k} \, \mathrm{dt} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/(4\omega)} \frac{1}{t^k} \, \mathrm{dt} = +\infty.$$

Donc $\mathcal{L}(t^n \cos(\omega t))(s)$ n'est pas bien définie pour chaque $s \in \mathbb{C}$ si $n < 0$.

Exercice 3.1(7) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = t^2 H(t)$ (où H est la fonction de l'Exercice 3.1(1)), et préciser son domaine de définition.*

Celui-ci est simplement un cas particulier de l'Exercice 3.1(2).

Exercice 3.1(8) *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = (t^2 + t)e^{-t} H(t)$ (où H est la fonction de l'Exercice 3.1(1)), et préciser son domaine de définition.*

Si $\mathcal{L}((t^2 + t)e^{-t} H(t))(s)$ est bien définie, on a

$$\mathcal{L}((t^2 + t)e^{-t} H(t))(s) = \mathcal{L}((t^2 + t)e^{-t})(s) =$$

$$= \mathcal{L}(t^2 e^{-t})(s) + \mathcal{L}(t e^{-t})(s) = \mathcal{L}(t^2)(s+1) + \mathcal{L}(t)(s+1).$$

En utilisant l'Exercice 3.1(2), $\mathcal{L}(t^2)(s+1)$ et $\mathcal{L}(t)(s+1)$ sont bien définies si et seulement si $\mathrm{Re}(s+1) > 0$, de manière équivalente si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > -1$. Dans ce cas, on a:

$$\mathcal{L}(t^2)(s+1) + \mathcal{L}(t)(s+1) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{2 + s + 1}{(s+1)^3} = \frac{s+3}{(s+1)^3}.$$

Exercice 3.2(1) *Utiliser la transformée de Laplace pour trouver les solutions de l'équation différentielle*

$$y'(t) + y(t) = t(H(t) - H(t-1)) \tag{0.1}$$

pour $t \in [0, \infty[$, avec la condition initiale $y(0) = 0$ (avec $y(t)$ continue et C^1 par morceaux).

On cherche de calculer la quantité

$$\mathcal{L}(t(H(t)-H(t-1)))(s)$$

(où elle est bien définie). On a:

$$\mathcal{L}(t(H(t)-H(t-1)))(s)=\mathcal{L}(t(H(t))(s)-\mathcal{L}(tH(t-1))(s).$$

Maintenant $H(t-1)=1$ si $t\geq 1$, $H(t-1)=0$ ailleurs. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(tH(t-1))(s)&=\int_1^{\infty} te^{-st}\,\mathrm{dt}=\int_0^{\infty}(r+1)e^{-s(r+1)}\,\mathrm{dr}=\\ &=e^{-s}\int_0^{\infty}(r+1)e^{-sr}\,\mathrm{dr}=e^{-s}(\mathcal{L}(t)(s)+\mathcal{L}(1)(s)).\end{aligned}$$

Donc en utilisant l'Exercice 3.2(2) on a:

$$\mathcal{L}(t(H(t)-H(t-1)))(s)=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left[\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right]=\frac{1-e^{-s}(1+s)}{s^2}.$$

En utilisant la Proposition 2.2 du Chapitre 6, on a:

$$\mathcal{L}(y'(t))(s)=s\mathcal{L}(y(t))(s)-y(0)=s\mathcal{L}(y(t))(s).$$

Donc en appliquant la transformée de Laplace à l'équation (0.1), on a:

$$s\mathcal{L}(y(t))(s)+\mathcal{L}(y(t))(s)=\frac{1-e^{-s}(1+s)}{s^2}.$$

Donc il faut que:

$$\mathcal{L}(y(t))(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1-e^{-s}(1+s)}{s^2}=\frac{1}{(s+1)s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}. \tag{0.2}$$

Maintenant on cherche d'écrire la partie de droite comme la transformée de Laplace de quelque fonction. En particulier, on cherche d'obtenir une somme avec des transformée de Laplace comme celle qu'on a déjà vu dans les pages précédentes. En particulier, on cherche d'écrire:

$$\frac{1}{(s+1)s^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}$$

pour des constantes $A,B,C\in\mathbb{R}$ à déterminer. Avec un calcul directe on a: $A=1$, $B=-1$, $C=1$. Donc

$$\frac{1}{(s+1)s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}. \tag{0.3}$$

Maintenant en intégrant par parties on a:

$$\begin{aligned}\int_0^1(t-1)e^{-st}\,\mathrm{dt}&=\left[\frac{(t-1)e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1\frac{e^{-st}}{-s}\,\mathrm{dt}=\\ &=-\frac{1}{s}-\left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_{t=0}^{t=1}=-\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}.\end{aligned} \tag{0.4}$$

Donc il faut que:

$$\mathcal{L}(y(t))(s)\overset{(0.2)}{=}\frac{1}{(s+1)s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}\overset{(0.3)}{=}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}\overset{(0.4)}{=}$$

$$\overset{(0.4)}{=} \frac{1}{s+1} + \int_0^1 (t-1)e^{-st}\,\mathrm{dt}\,. \tag{0.5}$$

En appliquant l'Exercice 3.1(1) on a:

$$\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(H(t))(s+1) = \int_0^\infty e^{-(s+1)t}\,\mathrm{dt} = \int_0^\infty e^{-t}e^{-st}\,\mathrm{dt}\,. \tag{0.6}$$

En plus, on peut écrire:

$$\int_0^1 (t-1)e^{-st}\,\mathrm{dt} = \int_0^\infty (t-1)(H(t)-H(t-1))e^{-st}\,\mathrm{dt}\,. \tag{0.7}$$

Donc il faut que

$$\mathcal{L}(y(t))(s) \overset{(0.5),(0.6),(0.7)}{=} \int_0^\infty \big(e^{-t} + (t-1)(H(t)-H(t-1))\big)\, e^{-st}\,\mathrm{dt}\,.$$

Si on note

$$f(t) := e^{-t} + (t-1)(H(t)-H(t-1)) = \begin{cases} e^{-t}+t-1 & \text{si } t\in[0,1[\\ e^{-t} & \text{si } t\in[1,\infty[\,, \end{cases}$$

alors il faut que

$$\mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \qquad \forall\, s\in\mathbb{C},\ \text{t. q. } \operatorname{Re}(s)>0.$$

Donc il faut que

$$y(t) = f(t) \quad \forall\, t\in\mathbb{R}_{\geq 0}.$$

On peut obtenir le même résultat comme suit. La fonction $y(t)$ qu'on cherche doit satisfaire:

$$y'(t) + y(t) = t-1 \qquad \forall\, t\in[0,1[\,, \tag{0.8}$$

$$y(0) = 0 \tag{0.9}$$

et

$$y'(t) + y(t) = 0 \qquad \forall\, t\in[1,\infty[. \tag{0.10}$$

En plus, $y(t)$ doit être continue, donc il faut que

$$y(1) = \lim_{t\to 1, t<1} y(t). \tag{0.11}$$

Une solution fondamentale pour l'équation homogène associée au (0.8) est e^{-t}. En plus, une solution particulière du cas complet (0.8) est $t-1$ (on peut la trouver avec la méthode de la variation de la constante). Donc la solution générale de (0.8) est

$$y(t) = \mu e^{-t} + t - 1, \qquad \forall\,\mu\in\mathbb{R}, \qquad \forall\, t\in[0,1[\,.$$

En utilisant (0.9), il faut que $\mu = 1$. En plus, la solution générale de (0.10) est

$$y(t) = \lambda e^{-t} \qquad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}, \qquad \forall\, t\in[1,\infty[\,.$$

En utilisant (0.10), il faut que $\lambda = 1$. Donc la solution du problème est

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t}+t-1 & \text{si } t\in[0,1[\\ e^{-t} & \text{si } t\in[1,\infty[\,. \end{cases}$$

Exercice 3.2(2) *Utiliser la transformée de Laplace pour trouver les solutions de l'équation différentielle*

$$y''(t) - y'(t) + y(t) = H(t) \tag{0.12}$$

pour $t \in [0, \infty[$, *avec les condition initiales* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$.

En utilisant la Proposition 2.2 du Chapitre 6, on a:

$$\mathcal{L}(y'(t))(s) = s\mathcal{L}(y(t))(s) - y(0) = s\mathcal{L}(y(t))(s)$$

et

$$\mathcal{L}(y''(t))(s) = s^2\mathcal{L}(y(t))(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}(y(t))(s).$$

En utilisant l'Exercice 3.1(1), on a:

$$\mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s}.$$

Donc en appliquant la transformée de Laplace à (0.12) on a:

$$s^2\mathcal{L}(y(t))(s) - s\mathcal{L}(y(t))(s) + \mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s}.$$

Donc il faut que

$$\mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s^2 - s + 1} \cdot \frac{1}{s}.$$

Maintenant on veut écrire

$$\frac{1}{s(s^2 - s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} + \frac{C}{s - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$$

pour des constantes $A, B, C \in \mathbb{C}$ à déterminer. Donc il faut que:

$$A(s^2 - s + 1) + B\left(s^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)s\right) + C\left(s^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)s\right) = 1,$$

donc

$$s^2(A + B + C) + s\left(-A + B\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + C\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right) + (A - 1) = 0.$$

Donc $A = 1$, $B + C = -1$ et

$$-1 + B\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + C\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Donc $B = -C - 1$ et

$$-1 + (-C - 1)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + C\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Donc

$$C\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) - 1 + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Donc

$$C = \frac{1}{-i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Donc

$$B = -C - 1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}}{s - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}}{s - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} = \\
= \mathcal{L}(H(t))(s) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)\mathcal{L}(H(t))\left(s - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \\
+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)\mathcal{L}(H(t))\left(s - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \\
= \mathcal{L}(H(t))(s) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)\mathcal{L}\left(H(t)e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t}\right)(s) + \\
+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)\mathcal{L}\left((H(t)e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t}\right)(s) = \\
= \mathcal{L}\left((H(t)\left(1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t}\right)\right)(s).
\end{aligned}$$

Maintenant on a:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)t} = \\
= e^{t/2} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)\left(\cos(\sqrt{3}t/2) + i\sin(\sqrt{3}t/2)\right) + \right. \\
\left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right)\left(\cos(\sqrt{3}t/2) - i\sin(\sqrt{3}t/2)\right)\right] = \\
= e^{t/2} \cdot \left(-\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t/2)\right).
\end{aligned}$$

Donc il faut que:

$$\mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}\left(H(t)\left(1 + e^{t/2} \cdot \left(-\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t/2)\right)\right)\right)(s)$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > 0$. Donc il faut que

$$y(t) = H(t)\left(1 + e^{t/2} \cdot \left(-\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t/2)\right)\right).$$

Donc il faut

$$y(t) = 1 + e^{t/2} \cdot \left(-\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t/2)\right) \quad \forall\, t \in [0, \infty[\,.$$

Autre méthode: il faut que

$$y''(t) - y'(t) + y(t) = 1 \qquad \forall\, t \in [0, \infty[\tag{0.13}$$

Le polynôme associé à l'équation homogène associée à (0.13) est $T^2 - T + 1$, dont les racines différentes sont:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc un système fondamentale des solutions pour le cas homogène est donné par:

$$y_1(t) = e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) \qquad \text{et} \qquad y_2(t) = e^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2).$$

En plus, une solution particulière de (0.13) est la fonction $y_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0, \infty[$. Donc la solution générale de (0.13) est

$$y(t) = e^{t/2}(\alpha\cos(\sqrt{3}t/2) + \beta\sin(\sqrt{3}t/2)) + 1 \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, t \in [0, \infty[\,.$$

Maintenant pour chaque α, β fixé, on a:

$$y'(t) = e^{t/2}\left(\frac{\alpha}{2}\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{\beta}{2}\sin(\sqrt{3}t/2) - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}t/2) + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}t/2)\right).$$

Donc

$$y'(0) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}.$$

En plus, on a

$$y(0) = \alpha + 1.$$

Donc il faut que

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 0 \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} = 0. \end{cases}$$

Donc il faut $\alpha = -1$ et $\beta = 1/\sqrt{3}$. Donc la solution de l'Exercice est

$$y(t) = e^{t/2}\left(-\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t/2)\right) + 1 \qquad \forall\, t \in [0, \infty[\,.$$

Exercice 3.2(3) *Utiliser la transformée de Laplace pour trouver les solutions de l'équation différentielle*

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-2t}H(t) \tag{0.14}$$

pour $t \in [0, \infty[$, *avec le conditions initiales* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.

En utilisant la Proposition 2.2 du Chapitre 6, on a:

$$\mathcal{L}(y'(t))(s) = s\mathcal{L}(y(t))(s) - y(0) = s\mathcal{L}(y(t))(s) - 1$$

et

$$\mathcal{L}(y''(t))(s) = s^2\mathcal{L}(y(t))(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}(y(t))(s) - s.$$

En plus, on a

$$\mathcal{L}(e^{-2t}H(t))(s) = \mathcal{L}(H)(s+2) = \frac{1}{s+2}.$$

Donc en appliquant la transformée de Laplace à (0.14) on a:

$$s^2\mathcal{L}(y(t))(s) - s + 2s\mathcal{L}(y(t))(s) - 2 + 2\mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Donc il faut:

$$(s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s+2} + s + 2 = \frac{s^2 + 4s + 5}{s+2}.$$

Donc il faut:

$$\mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{s^2 + 4s + 5}{s+2}.$$

Maintenant on cherche d'écrire

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{s^2 + 4s + 5}{s+2} = \frac{A}{s+1+i} + \frac{B}{s+1-i} + \frac{C}{s+2}$$

pour des constantes $A, B, C \in \mathbb{C}$. Donc il faut:

$$s^2 + 4s + 5 = A(s+1-i)(s+2) + B(s+1+i)(s+2) + C(s^2 + 2s + 2).$$

Donc:

$$s^2 + 4s + 5 = A(s^2 + (3-i)s + 2 - 2i) + B(s^2 + (3+i)s + 2 + 2i) + C(s^2 + 2s + 2).$$

Donc

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ A(3-i) + B(3+i) + 2C = 4 \Longleftrightarrow A(-6+2i) + B(-6-2i) - 4C = -8 \\ A(2-2i) + B(2+2i) + 2C = 5. \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ -6A - 6B - 4C + 2A + 2B + 2C = -3. \\ A(2-2i) + B(2+2i) + 2C = 5. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4A + 4B + 4C = 4 \\ -4A - 4B - 2C = -3. \\ A(2-2i) + B(2+2i) + 2C = 5. \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} C = 1/2 \\ -4A - 4B - 1 = -3 \\ A(2-2i) + B(2+2i) + 1 = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C = 1/2 \\ -4A - 4B = -2 \\ A(2-2i) + B(2+2i) = 4. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} C = 1/2 \\ A = -B + 1/2 \\ (-B + 1/2)(2-2i) + B(2+2i) = 4. \end{cases}$$

Donc

$$4iB + 1 - i = -4 \Longrightarrow 4iB = 3 + i \Longrightarrow B = \frac{1}{4i}(3+i) = \frac{1}{4} - \frac{3i}{4}.$$

Donc

$$A = -B + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{3i}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3i}{4}.$$

Donc

$$\mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3i}{4}}{s+1+i} + \frac{\frac{1}{4}-\frac{3i}{4}}{s+1-i} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} =$$
$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{3i}{4}\right)\mathcal{L}(e^{-(1+i)t}H(t)) + \left(\frac{1}{4}-\frac{3i}{4}\right)\mathcal{L}(e^{-(1-i)t}H(t)) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-2t}H(t)) =$$
$$= \mathcal{L}\left(H(t)\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{3i}{4}\right)e^{-(1+i)t} + \left(\frac{1}{4}-\frac{3i}{4}\right)e^{-(1-i)t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\right)(s).$$

Donc il faut que

$$y(t) = \left(\frac{1}{4}+\frac{3i}{4}\right)e^{-(1+i)t} + \left(\frac{1}{4}-\frac{3i}{4}\right)e^{-(1-i)t} + \frac{1}{2}e^{-2t} =$$
$$= e^{-t}\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{3i}{4}\right)(\cos(t)-i\sin(t)) + \left(\frac{1}{4}-\frac{3i}{4}\right)(\cos(t)+i\sin(t))\right] + \frac{e^{-2t}}{2} =$$
$$= e^{-t}\left(\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)\right) + \frac{e^{-2t}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-t}\left(\cos(t)+3\sin(t)\right) + e^{-2t}\right), \qquad \forall\, t \in [0,\infty[\,.$$

Autre méthode: il faut que:

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-2t} \qquad \forall\, t \in [0,\infty[\tag{0.15}$$

et

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{0.16}$$

Le polynôme associé au cas homogène est $T^2 + 2T + 2$, dont les racines différentes sont $-1 \pm i$. Donc un système fondamentale de solutions pour le cas homogène est donné par:

$$y_1(t) = e^{-t}\cos(t) \qquad \text{et} \qquad y_2(t) = e^{-t}\sin(t).$$

On cherche une solution particulière de (0.15) de la forme

$$y_0(t) := \lambda e^{-2t}$$

pour une constante λ à déterminer. On a:

$$y_0'(t) = -2\lambda e^{-2t}, \qquad y''(t) = 4\lambda e^{-2t}.$$

Donc il faut

$$e^{-2t} = y_0''(t) + 2y_0'(t) + 2y_0(t) = \lambda(4-4+2)e^{-2t} = 2\lambda e^{-2t}.$$

Donc il faut $\lambda = 1/2$. Donc la solution générale de (0.15) est

$$y(t) = e^{-t}(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)) + \frac{e^{-2t}}{2}, \qquad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, t \in [0,\infty[.$$

Pour chaque α, β fixé, on a:

$$y'(t) = e^{-t}(-\alpha\cos(t) - \beta\sin(t) - \alpha\sin(t) + \beta\cos(t)) - e^{-2t}.$$

Donc on a:

$$y'(0) = -\alpha + \beta - 1$$

et

$$y(0) = \alpha + \frac{1}{2}.$$

Donc en appliquant (0.16) il faut:

$$\alpha + \frac{1}{2} = 1, \qquad -\alpha + \beta - 1 = 0.$$

Donc il faut $\alpha = 1/2$ et $\beta = 3/2$, donc la solution de l'Exercice est

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2}(\cos(t) + 3\sin(t)) + \frac{e^{-2t}}{2}, \qquad \forall\, t \in [0, \infty[\,.$$

MATHEMATICS RESEARCH UNIT
UNIVERSITY OF LUXEMBOURG
6, RUE RICHARD COUDENHOVE-KALERGI
L-1359 LUXEMBOURG

WEBSITE: HTTP://MATTEOTOMMASINI.ALTERVISTA.ORG/

EMAIL: MATTEO.TOMMASINI2@GMAIL.COM