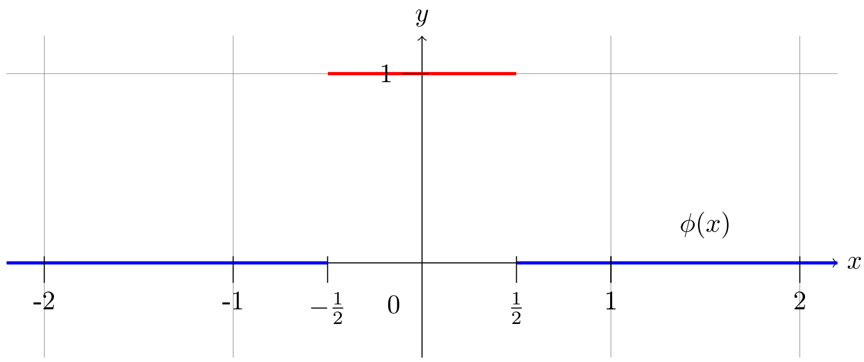
ANALYSE 3B - TRAVAUX DIRIGÉS
CHAPITRE 5 - TRANSFORMÉE DE FOURIER

MATTEO TOMMASINI

Si vous trouvez des erreurs de français (très probable) ou de mathématiques (moins improbable, mais pas impossible), dite-le-moi, merci!

Exercice 8.1(1) *Soit ϕ la fonction égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$, et à 0 ailleurs. On note ϕ^{*n} le produit de convolution de ϕ n fois avec elle-même, par exemple $\phi^{*3} = \phi * \phi * \phi$. Calculer $\phi * \phi$. Montrer que c'est une fonction continue, affine par morceaux.*



On a:

$$\phi(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - \frac{1}{2} \leq y \leq x + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Donc

$$(\phi * \phi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\phi(x-y)\,\mathrm{dy} = \int_{-1/2}^{1/2} \phi(x-y)\,\mathrm{dy} = \int_{D_2(x)} \mathrm{dy}$$

où $D_2(x)$ est le domaine de $\mathbb{R}$

$$D_2(x) := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right].$$

On a 4 possibilités comme suit.

(A) Si $x < -1$, alors $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}] \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \varnothing$ (parce que le premier intervalle est à gauche du deuxième).

(B) Si $-1 \leq x < 0$, alors $D_2(x) = [-\frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$, dont la longueur est $x + \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = x + 1$.

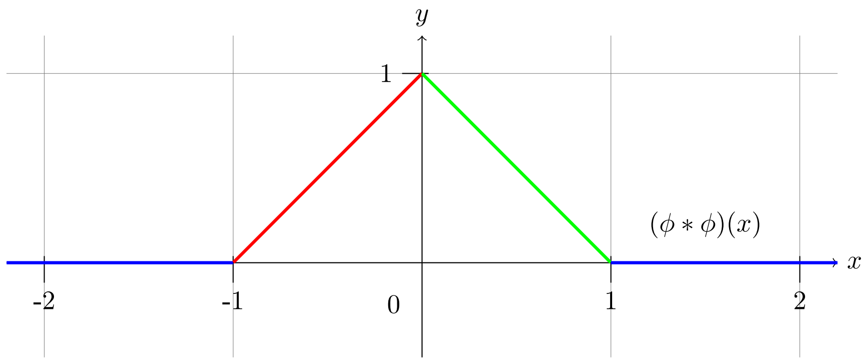
Date: December 11, 2014.

(C) Si $0 \leq x \leq 1$, alors $D_2(x) = [x - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, dont la longueur est $\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2}) = 1 - x$.

(D) Si $x > 1$, alors $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}] \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \varnothing$ (parce que le premier intervalle est à droite du deuxième).

Donc on a:

$$(\phi * \phi)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{0.1}$$



Cette fonction est continue, affine par morceaux, et son support est $[-1, 1]$.

Exercice 8.1(2) *Calculer $\phi * \phi * \phi$. Montrer que c'est une fonction C^1, à support compact, et qu'il existe un nombre fini d'intervalles qui recouvrent $\mathbb{R}$, sur lesquels cette fonction est un polynôme de degré au plus 2.*

$\phi(x - y) = 1$ si $y \in [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$, 0 ailleurs, donc

$$(\phi * \phi * \phi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi * \phi)(y)\phi(x - y)\,\mathrm{dy} =$$
$$= \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} (\phi * \phi)(y)\,\mathrm{dy} \overset{(0.1)}{=} \int_{D_3(x)} (\phi * \phi)(y)\,\mathrm{dy}$$

où $D_3(x)$ est le domaine de $\mathbb{R}$:

$$D_3(x) := [-1, 1] \cap \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right].$$

On a 5 possibilités comme suit.

(A) Si $x < -\frac{3}{2}$, alors $D_3(x) = \varnothing$, donc $(\phi * \phi * \phi)(x) = 0$.

(B) Si $-\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2}$, alors $D_3(x) = [-1, x + \frac{1}{2}]$ et $x + \frac{1}{2} \leq 0$, donc

$$(\phi * \phi * \phi)(x) = \int_{-1}^{x+1/2} (\phi * \phi)(y)\,\mathrm{dy} \overset{(0.1)}{=} \int_{-1}^{x+1/2} y + 1\,\mathrm{dy} = \left[\frac{y^2}{2} + y\right]_{-1}^{x+1/2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + x + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{8}.$$

(C) Si $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$, alors $D_3 = [x - \frac{1}{2}, 0] \coprod\,]0, x + \frac{1}{2}]$, donc

$$(\phi * \phi * \phi)(x) = \int_{x-1/2}^{0} (\phi * \phi)(y)\,\mathrm{dy} + \int_{0}^{x+1/2} (\phi * \phi)(y)\,\mathrm{dy} \overset{(0.1)}{=}$$
$$\overset{(0.1)}{=} \int_{x-1/2}^{0} y + 1\,\mathrm{dy} + \int_{0}^{x+1/2} 1 - y\,\mathrm{dy} =$$
$$= \left[\frac{y^2}{2} + y\right]_{x-1/2}^{0} + \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{0}^{x+1/2} =$$
$$= 0 - \left(\frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + x - \frac{1}{2}\right) + x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 0 =$$
$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} - x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} - x^2.$$

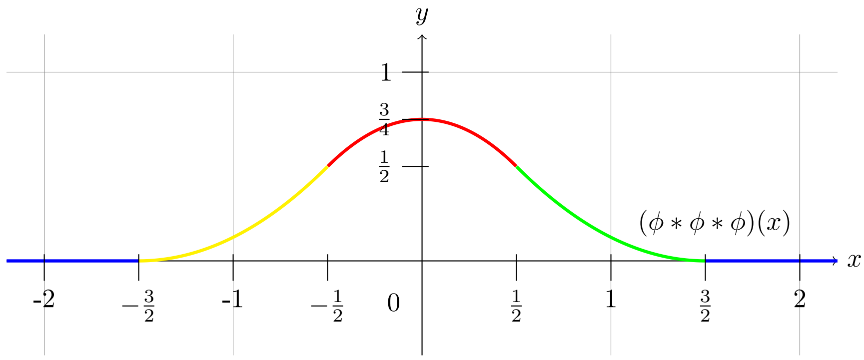
(D) Si $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, alors $D_3(x) = [x - \frac{1}{2}, 1]$ et $x - \frac{1}{2} > 0$, donc

$$(\phi * \phi * \phi)(x) = \int_{x-1/2}^{1} (\phi * \phi)(y)\,\mathrm{dy} \overset{(0.1)}{=} \int_{x-1/2}^{1} 1 - y\,\mathrm{dy} = \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{x-1/2}^{1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{9}{8}.$$

(E) Si $x > \frac{3}{2}$, alors $D_3(x) = \varnothing$, donc $(\phi * \phi * \phi)(x) = 0$.

Donc on a:

$$(\phi * \phi * \phi)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{3}{2} \\ x^2/2 + 3x/2 + 9/8 & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \\ 3/4 - x^2 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ x^2/2 - 3x/2 + 9/8 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{0.2}$$



Cette fonction a support égale à l'intervalle $[-3/2, 3/2]$. On défini

$$F_1(x) := x^2/2 + 3x/2 + 9/8, \quad F_2(x) := 3/4 - x^2, \quad F_3(x) := x^2/2 - 3x/2 + 9/8.$$

Alors on a

$$F_1(-3/2) = 0, \qquad \lim_{x \to -1/2} F_1(x) = 1/2 = F_2(-1/2),$$
$$\lim_{x \to +1/2} F_2(x) = 1/2 = F_3(1/2), \quad F_3(3/2) = 0,$$

donc $\phi * \phi * \phi$ est continue. En plus, on a:

$$F_1'(-3/2) = (x+3/2)|_{x=-3/2} = 0,$$
$$\lim_{x \to -1/2} F_1'(x) = \lim_{x \to -1/2} (x+3/2) = 1 = (-2x)|_{x=-1/2} = F_2'(-1/2),$$
$$\lim_{x \to +1/2} F_2'(x) = \lim_{x \to +1/2} (-2x) = -1 = (x-3/2)|_{x=1/2} = F_3'(1/2),$$
$$F_3'(3/2) = (x-3/2)|_{x=3/2} = 0.$$

Donc $\phi * \phi * \phi$ est de classe C^1.

Exercice 8.1(3) *Montrer que la même description de l'Exercice 8.1(2) s'applique à ϕ^{*n}, mais avec des polynômes de degré au plus $n-1$.*

On va montrer le résultat avec induction. Donc on suppose que la description est vraie pour ϕ^{*n} et on va prouver la même chose pour $\phi^{*(n+1)} = \phi^{*n} * \phi$. Si la description est vraie pour ϕ^{*n}, alors on a un nombre fini de points

$$-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k(n)} < +\infty$$

et des polynômes $F_1, \cdots, F_{k(n)}$ tels que:
(a) chaque polynôme F_i a degré au plus $n-1$;
(b) pour chaque $r = 1, \cdots, k(n)-1$, ϕ^{*n} coïncide avec F_i sur $[a_i, a_{i+1}]$;
(c) $\phi^{*n}(x) = 0$ si $x < a_1$ ou $x > a_{k(n)}$;
(d) ϕ^{*n} est une fonction de classe C^n.

Maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$(\phi^{*n} * \phi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{*n}(y)\phi(x-y)\,\mathrm{dy} = \int_{x-1/2}^{x+1/2} \phi^{*n}(y)\,\mathrm{dy}\,. \tag{0.3}$$

Si $x \leq a_1 - \frac{1}{2}$ ou $x \geq a_{k(n)} + \frac{1}{2}$, alors grâce à (c) on a:

$$\phi^{*n}(y) = 0 \quad \forall\, y \in \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right],$$

donc

$$(\phi^{*n} * \phi)(x) = 0 \quad \forall\, x \leq a_1 - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall\, x \geq a_{k(n)} + \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, $\phi^{*(n+1)}$ est encore à support compact (son support est au plus l'intervalle $[a_1 - 1/2, a_{k(n)} + 1/2]$). En plus, pour tout $x \in [a_1 - 1/2, a_{k(n)} + 1/2]$, on a:

$$(\phi^{*n} * \phi)(x) = \int_{D(x)} \phi^{*n}(y)\,\mathrm{dy} \tag{0.4}$$

où $D(x)$ est le domaine de $\mathbb{R}$:

$$D(x) := \big[a_1, a_{k(n)}\big[\,\cap \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right].$$

On peut aussi écrire

$$D(x) = D(1,x) \coprod \cdots \coprod D(k(n)-1,x)$$

où

$$D(i,x) := [a_i, a_{i+1}[\, \cap \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right] \qquad \forall\, i = 1, \cdots, k(n)-1. \tag{0.5}$$

Donc

$$\forall\, x \in \left[a_1 - \frac{1}{2}, a_{k(n)} + \frac{1}{2}\right[\quad \text{on a} \quad (\phi^{*n} * \phi)(x) \overset{(0.4)}{=} \sum_{i=1}^{k(n)-1} \int_{D(i,x)} \phi^{*n}(y)\,\mathrm{dy}\,.$$

En général, quelques $D(i,x)$ peut être vide. Si $D(i,x)$ est vide, alors $\int_{D(i,x)} \phi^{*n}(y)\,\mathrm{dy} = 0$. Donc on a:

$$\forall\, x \in \left[a_1 - \frac{1}{2}, a_{k(n)} + \frac{1}{2}\right[\quad (\phi^{*n} * \phi)(x) = \sum_{i \text{ t.q. } D(i,x) \neq \varnothing} \int_{D(i,x)} \phi^{*n}(y)\,\mathrm{dy}\,. \tag{0.6}$$

Maintenant on considère l'ensemble des points de la forme

$$\left\{a_i - \frac{1}{2}, a_i + \frac{1}{2}\right\}_{i=1,\cdots,k(n)}$$

et on note $k(n+1)$ le nombre de ces points. Ces points en general ne sont pas bien ordonnés sur la droite reelle et parfois il coïncident, donc $k(n+1) \leq 2k(n)$. Si necessaire, on met ces points dans un bon ordre, c'est-à-dire on les appelle

$$-\infty < c_1 < c_2 < \cdots < c_{k(n+1)} < \infty$$

(la seule chose qu'on sait est que $c_1 = a_1 - 1/2$ et $c_{k(n+1)} = a_{k(n)} + 1/2$). Maintenant pour tout $l = 1, \cdots, k(n+1)-1$ il est facile de montrer que

$$\forall\, l = 1, \cdots, k(n+1)-1,\ \forall\, x, x' \in [c_l, c_{l+1}[\,,\ \forall i = 1, \cdots, k(n)-1$$

on a

$$D(i,x) \neq \varnothing \Longleftrightarrow D(i,x') \neq \varnothing. \tag{0.7}$$

Pour tout $l = 1, \cdots, k(n+1)-1$ on pose

$$I(l) := \Big\{ i \in \{1, \cdots, k(n)-1\} \quad \text{t.q.} \quad \exists\, x_0 \in [c_l, c_{l+1}[\quad \text{t.q.} \quad D(i,x_0) \neq \varnothing \Big\}.$$

En utilisant (0.7), pour tout $x \in [c_l, c_{l+1}[$ on a:

$$D(i,x) \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad i \in I(l).$$

Donc:

$$\forall\, l = 1, \cdots, k(n+1)-1,\ \forall\, x \in [c_l, c_{l+1}[\quad (\phi^{*n} * \phi)(x) \overset{(0.6)}{=} \sum_{i \in I(l)} \int_{D(i,x)} \phi^{*n}(y)\,\mathrm{dy} \tag{0.8}$$

et chaque $D(i,x)$ en (0.8) n'est pas vide. En plus, en utilisant (0.5) l'extrémité gauche $g(i,x)$ de $D(i,x)$ est nécessairement

$$g(i,x) = a_i - \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad g(i,x) = x - \frac{1}{2}$$

et l'extrémité droite $d(i,x)$ est nécessairement

$$d(i,x) = a_{i+1} + \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad d(i,x) = x + \frac{1}{2}.$$

Donc $D(i,x)$ est un intervalle non vide, dont les extrémité sont deux points $g(i,x)$ et $d(i,x)$, qui dépendent au plus *linéairement* de x. On note $G_i(y)$ un polynôme qui est une primitive pour $F_i(y)$. Vu que F_i a degré au plus $n-1$ grâce à (a), alors $G_i(y)$ a degré au plus n en y. En plus, on a:

$$\int_{D(i,x)} F_i(y)\,\mathrm{dy} = \Big[G_i(y)\Big]_{y=g(i,x)}^{y=d(i,x)} = G_i(d(i,x)) - G_i(g(i,x)).$$

Vu que $d(i,x)$ et $g(i,x)$ dépendent au plus linéairement de x, alors $\int_{D(i,x)} F_i(y)\,\mathrm{dy}$ est un polynôme de degré au plus n en x. On note ce polynôme $H_i(x)$. Donc on a prouvé que pour tout $l = 1, \cdots, k(n+1)-1$ et pout tout $x \in [c_l, c_{l+1}[$ on a:

$$(\phi^{*n} * \phi)(x) = \sum_{i \in I(l)} H_i(x).$$

Pour tout $l = 1, \cdots, k(n+1)-1$, on note $M_l(x)$ le polynôme $\sum_{i\in I(l)} H_i(x)$. Donc on a prouvé qu'il existe un nombre fini d'intervalles disjoints $[c_l, c_{l+1}[$ qui recouvrent $[a_1 - 1/2, a_{k(n)} + 1/2[$ et des polynômes M_l, tels que:

(a) chaque M_l a degré au plus n;
(b) pour chaque l, $\phi^{*(n+1)}$ coïncide avec M_l sur l'intervalle $[c_l, c_{l+1}[$;
(c) $\phi^{*(n+1)}(x) = 0$ si $x < c_1 - 1/2$ ou $x \geq c_{k(n+1)} + 1/2$.

On note $P(y)$ une primitive pour la fonction $\phi^{*n}(y)$. Alors en utilisant (0.3), pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$\phi^{*(n+1)}(x) = P(x + 1/2) - P(x - 1/2).$$

Grâce à (d), $\phi^{*n}(-)$ est de classe C^n, donc $P(-)$ est de classe C^{n+1}; donc aussi $\phi^{*(n+1)}(-)$ est de classe C^{n+1}, donc aussi la condition (d) est satisfaite pour $\phi^{*(n+1)}$. Cela suffit pour compléter l'exercice.

Exercice 8.2(1) *Soit ϕ une fonction C^∞ à support compact, d'intégrale égale à* 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on pose*

$$\psi_n(x) := n\psi(nx) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que ψ_n est encore à support compact et que son intégrale est encore égale à 1. *Quel est son support?*

On suppose que le support de ψ est l'intervalle $[a,b]$. Donc $\mathrm{supp}(\psi_n) = [a/n, b/n]$. En plus,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} n\psi(nx)\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\,\mathrm{dy} = 1.$$

Exercice 8.2(2) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\lim_{n\to+\infty} (f * \psi_n)(x) = f(x).$$

On a

$$(f * \psi_n)(x) = (\psi_n * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) f(x-y)\,\mathrm{dy} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} n\psi(ny)f(x-y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Si on considère le changement de variables $y = z/n$, on a $\mathrm{dy} = \mathrm{dz}/n$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} n\psi(ny)f(x-y)\,\mathrm{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)f\left(x-\frac{z}{n}\right)\mathrm{dz} =$$
$$= \int_{a}^{b} \psi(z)f\left(x-\frac{z}{n}\right)\mathrm{dz}\,.$$

Donc on a:

$$\lim_{n\to+\infty}(f*\psi_n)(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_{a}^{b} \psi(z)f\left(x-\frac{z}{n}\right)\mathrm{dz} =$$
$$= \int_{a}^{b} \psi(z)\lim_{n\to+\infty} f\left(x-\frac{z}{n}\right)\mathrm{dz} = \int_{a}^{b} \psi(z)f(x)\,\mathrm{dz} = f(x)\int_{a}^{b}\psi(z)\,\mathrm{dz} = f(x).$$

Exercice 8.3 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$, tels que $f_n : x \mapsto x^n f(x)$ soit encore en $L^1(\mathbb{R})$. Exprimer la transformée de Fourier de f_n en fonction de celle de $\hat{f}^{(n)}$.*

Avant de considérer l'Exercice, on va montrer ce résultat:

Lemma 0.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, telle que $\hat{f}$ est encore en $L^1(\mathbb{R})$. Alors on a:*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

(ou l'égalité est une égalité en $L^1(\mathbb{R})$).

Proof. Pour simplifier un peu la preuve, on considère seulement le cas où f est assez régulière. En appliquant le Théorème 2.3 du Chapitre 5, on a $\check{\hat{f}} = f$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a:

$$f(t) = \check{\hat{f}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{it\xi}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

En particulier, si on prend $t := -x$, on a:

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi = \hat{\hat{f}}(x).$$

□

Maintenant on peut considérer l'Exercice 8.3. On sait (voir la Proposition 3.6 du Chapitre 5) que

$$\widehat{g^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n\hat{g}(\xi).$$

pour chaque fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que aussi $g' \in L^1(\mathbb{R})$. En particulier, on peut prendre $g := \hat{f}$, donc on a:

$$\widehat{g^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n\hat{\hat{f}}(\xi) = (i\xi)^n f(-\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\widehat{g^{(n)}}(-\xi) = (-i)^n\xi^n f(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

et aussi

$$\frac{1}{(-i)^n}\cdot\widehat{g^{(n)}}(-\xi) = f_n(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Si on note

$$h(x) := \frac{1}{(-i)^n} \cdot \widehat{g^{(n)}}(-x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

alors on a prouvé:

$$h(x) = f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si on prend la transformée de Fourier de ça, on a:

$$\hat{h}(\xi) = \widehat{f_n}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{0.9}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(-i)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g^{(n)}}(-x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{(-i)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g^{(n)}}(x) e^{ix\xi} \, \mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{(-i)^n} \cdot \check{\widehat{g^{(n)}}}(\xi) = \frac{g^{(n)}(\xi)}{(-i)^n}, \end{aligned} \tag{0.10}$$

où la dernière égalité est donnée par le Théorème 2.3 du Chapitre 5. Par construction, $g = \hat{f}$, donc on a:

$$\widehat{f_n}(\xi) \overset{(0.9)}{=} \hat{h}(\xi) \overset{(0.10)}{=} \frac{g^{(n)}(\xi)}{(-i)^n} = \frac{1}{(-i)^n} \cdot \hat{f}^{(n)}(\xi).$$

Exercice 8.4(1) *Calculer la transformée de Fourier de la fonction*

$$f_a(x) := e^{-a|x|}, \quad \text{pour}\, a \in \mathbb{R}_{>0}.$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ix\xi} \, \mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{x(a-i\xi)} \, \mathrm{dx} + \int_{0}^{\infty} e^{x(-a-i\xi)} \, \mathrm{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{e^{ax} e^{-ix\xi}}{a - i\xi} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-ax} e^{-ix\xi}}{-a - i\xi} \right]_{0}^{\infty} \right). \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\lim_{x \to -\infty} \left| \frac{e^{ax} e^{-ix\xi}}{a - i\xi} \right| = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{ax}}{|a - i\xi|} = 0$$

parce que $|e^{-ix\xi}| = 1$ et $a > 0$. Donc

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{ax} e^{-ix\xi}}{a - i\xi} = 0.$$

Avec les même calculs, on a aussi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-ax} e^{-ix\xi}}{-a - i\xi} = 0.$$

Donc

$$\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-i\xi} - \frac{1}{-a-i\xi}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{a+i\xi+a-i\xi}{a^2+\xi^2} = \frac{a\sqrt{2}}{(a^2+\xi^2)\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 8.4(2) *Calculer la transformée de Fourier de la fonction (gaussienne)*

$$g_a(x) := e^{-ax^2} \quad \text{pour}\, a > 0.$$

On a:

$$\hat{g}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, \mathrm{dx}\,.$$

On cherche de compléter l'argument de l'exponentiel à un carré. Donc on écrit

$$\exp(-ax^2 - ix\xi) = \exp(-ax^2 - ix\xi + \xi^2/4a - \xi^2/4a) =$$
$$= \exp(-ax^2 - ix\xi + \xi^2/4a)\exp(-\xi^2/4a) =$$
$$= \exp\left(-\left(\sqrt{a}x + \frac{i\xi}{2\sqrt{a}}\right)^2\right)\exp(-\xi^2/4a).$$

Si on considère le changement de coordonnées

$$x := \frac{y}{\sqrt{a}} - \frac{i\xi}{2a},$$

(avec ξ fixé) alors on a

$$\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{a}}$$

et

$$\hat{g}_a(\xi) = \frac{e^{-\xi^2/4a}}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, \mathrm{dy} =$$
$$= \frac{2e^{-\xi^2/4a}}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{\infty} e^{-y^2}\, \mathrm{dy} \overset{(*)}{=} \frac{2e^{-\xi^2/4a}}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{e^{-\xi^2/4a}}{\sqrt{2a}}.$$

Ici l'égalité $(*)$ est donnée par l'Exercice 7.14(4) du Chapitre 2. Donc la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne (avec une taille diffèrente). En particulier, si on prend $a = 1/2$, on a:

$$g_{1/2}(x) = e^{-x^2/2}, \qquad \hat{g}_{1/2}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

Exercice 8.4(3) *Calculer la transformée de Fourier de la fonction*

$$f(x) := 1 \quad \text{pour } \ x \in [-1/2, 1/2], \quad f(x) := 0 \quad \text{ailleurs}.$$

Si $\xi = 0$, on a

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Si $\xi \neq 0$, on a:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-ix\xi}\, \mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{-1/2}^{1/2} =$$
$$= \frac{e^{-i\xi/2} - e^{i\xi/2}}{-i\xi\sqrt{2\pi}} = \frac{i(e^{-i\xi/2} - e^{i\xi/2})}{\xi\sqrt{2\pi}},$$

Exercice 8.4(4) *Calculer la transformée de Fourier de la fonction*

$$g(x) := \begin{cases} x+1 & \text{pour } x \in [-1, 0[\\ 1-x & \text{pour } x \in [0,1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Si $\xi = 0$, on a:

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^{0} (x+1)\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} (1-x)\,\mathrm{dx} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{1} \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{2} + 1 + 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Si $\xi \neq 0$, alors en intégrant par parties on a:

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^{0} (x+1) e^{-ix\xi}\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} (1-x) e^{-ix\xi}\,\mathrm{dx} \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[(x+1) \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\,\mathrm{dx} + \left[(1-x) \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} -\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\,\mathrm{dx} \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-i\xi} - 0 - \left[\frac{e^{-ix\xi}}{(-i\xi)(-i\xi)} \right]_{-1}^{0} + 0 - \frac{1}{-i\xi} + \left[\frac{e^{-ix\xi}}{(-i\xi)(-i\xi)} \right]_{0}^{1} \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \left[\frac{1}{-\xi^2} - \frac{e^{i\xi}}{-\xi^2} \right] + \left[\frac{e^{-i\xi}}{-\xi^2} - \frac{1}{-\xi^2} \right] \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi}}{-\xi^2} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}}{\xi} \right)^2.$$

Exercice 8.5(1) *Soit $\lambda > 0$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction*

$$f_\lambda(x) := e^{-\lambda|x|}.$$

On a déjà calculé ça dans l'Exercice 8.4(1), donc on a:

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{(\lambda^2 + \xi^2)\sqrt{\pi}}. \tag{0.11}$$

Exercice 8.5(2) *En utilisant l'Exercice 8.5(1), déduire la transformée de Fourier de la fonction*

$$g_\lambda(x) := \frac{1}{x^2 + \lambda^2}.$$

En utilisant (0.11), on a

$$g_\lambda(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda\sqrt{2}} \cdot \hat{f}_\lambda(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Donc en utilisant la linéarité de la transformée de Fourier, on a:

$$\hat{g}_\lambda(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda\sqrt{2}} \cdot \hat{\hat{f}}_\lambda(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Si on applique le résultat qu'on a prouvé dans l'Exercice 8.3, on a:

$$\hat{\hat{f}}_\lambda(\xi) = f(-\xi) = e^{-\lambda|-\xi|} = e^{-\lambda|\xi|}.$$

Donc:

$$\hat{g}_\lambda(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}e^{-\lambda|\xi|}}{\lambda\sqrt{2}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{0.12}$$

Exercice 8.5(3) *En utilisant l'Exercice 8.5(2), déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{1+x^2}.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot e^{-i\cdot 0\cdot\xi}\,\mathrm{dx} =$$
$$= \sqrt{2\pi}\cdot\hat{g}_1(0) \overset{(0.12)}{=} \sqrt{2\pi}\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}e^{-\lambda|\xi|}}{\lambda\sqrt{2}}\right)_{\lambda=1,\xi=0} = \sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \pi.$$

Exercice 8.5(4) *Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, déterminer le produit de convolution de*

$$g_\lambda(x) := \frac{1}{x^2+\lambda^2} \qquad \text{et} \qquad g_\mu(x) := \frac{1}{x^2+\mu^2}$$

(on pourra utiliser leurs transformées de Fourier).

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a:

$$\hat{g}_\lambda(\xi)\cdot\hat{g}_\mu(\xi) \overset{(0.12)}{=} \frac{\sqrt{\pi}e^{-\lambda|\xi|}}{\lambda\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}e^{-\mu|\xi|}}{\mu\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{2\lambda\mu}\cdot e^{-(\lambda+\mu)|\xi|} = \frac{(\lambda+\mu)\sqrt{\pi}}{\lambda\mu\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}e^{-(\lambda+\mu)|\xi|}}{(\lambda+\mu)\sqrt{2}} \overset{(0.12)}{=}$$
$$\overset{(0.12)}{=} \frac{(\lambda+\mu)\sqrt{\pi}}{\lambda\mu\sqrt{2}}\cdot\hat{g}_{\lambda+\mu}(\xi).$$

On rappelle que pour $p, q \in L^1(\mathbb{R})$, on a:

$$\widehat{(p*q)}(\xi) = \hat{p}(\xi)\cdot\hat{q}(\xi). \tag{0.13}$$

Si on applique (0.13) avec

$$p := g_\lambda, \qquad q := g_\mu$$

on a:

$$\widehat{(g_\lambda * g_\mu)}(\xi) = \hat{g}_\lambda(\xi)\cdot\hat{g}_\mu(\xi) = \frac{(\lambda+\mu)\sqrt{\pi}}{\lambda\mu\sqrt{2}}\cdot\hat{g}_{\lambda+\mu}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

On applique a cette égalité la transformée de Fourier inverse. En appliquant le Théorème 2.3 du Chapitre 5 (et la linéarité de la transformée de Fourier inverse) on a:

$$(g_\lambda * g_\mu)(x) = \frac{(\lambda+\mu)\sqrt{\pi}}{\lambda\mu\sqrt{2}}\cdot g_{\lambda+\mu}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mathematics Research Unit
University of Luxembourg
6, rue Richard Coudenhove-Kalergi
L-1359 Luxembourg

website: http://matteotommasini.altervista.org/

email: matteo.tommasini2@gmail.com