ANALYSE 3B - TRAVAUX DIRIGÉS
CHAPITRE 4 - SÉRIES DE FOURIER

MATTEO TOMMASINI

Si vous trouvez des erreurs de français (très probable) ou de mathématiques (moins improbable, mais pas impossible), dite-le-moi, merci!

Exercice 7.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a*

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

On a

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^{b} f(t)\,\mathrm{dt} + \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{dt} + \int_{b+T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{dt}\,. \tag{0.1}$$

Maintenant on considère le changement de variables $x := t + T$; donc $\mathrm{dx} = \mathrm{dt}$ et on a:

$$\int_{b+T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_b^{a} f(x-T)\,\mathrm{dx} =$$
$$= -\int_a^{b} f(x-T)\,\mathrm{dx} \overset{(*)}{=} -\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{dt}$$

(l'identité $(*)$ est une conséquence du fait que f est T-périodique). Donc si on replace en (0.1) on a:

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^{b} f(t)\,\mathrm{dt} + \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^{b} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Exercice 7.2 *Calculer les coefficient de la série de Fourier complexe de la fonction $f : t \mapsto \cos(5t)$.*

Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$c_n(f) =< f, e_n >_{L^2([0,2\pi])} =< \cos(5t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} >_{L^2([0,2\pi])} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos(5t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int}\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{5it} + e^{-5it}}{2} \cdot \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{dt} =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{5it} + e^{-5it}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{5it}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{dt} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-5it}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{dt} \right) =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \Big(< e_5, e_n >_{L^2([0,2\pi])} + < e_{-5}, e_n >_{L^2([0,2\pi])} \Big).$$

Date: December 5, 2014.

Maintenant la famille

$$\left\{e_n = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

est une base orthonormée de $L^2([0,2\pi])$, donc

$$< e_k, e_l >_{L^2([0,2\pi])} = \delta_k^l \qquad \forall\, k,l \in \mathbb{Z}. \tag{0.2}$$

Donc

$$c_n(f) = \begin{cases} \sqrt{\pi}/\sqrt{2} & \text{si} \quad n=5 \quad \text{ou} \quad n=-5 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(on pouvait obtenir le même résultat directement, voir les prochaines lignes).

Pour contrôler si on a obtenu la réponse correcte, on peut utiliser le Corollaire 2.6: vu que $f(t) = \cos(5t)$ est continue, alors on a:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(c_{-5}e^{-5it} + c_5 e^{5it}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\Big((\cos(-5t) + i\sin(-5t) + \cos(5t) + i\sin(5t)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\cos(5t) = \cos(5t).$$

Exercice 7.3 *Montrer que si f est une fonction continue 2π-périodique, et si $c_n(f)$ sont ses coefficients de Fourier, alors $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$*

En utilisant l'identité de Parseval (voir le Théorème 7.6 du Chapitre 3, avec $\mathbb{N}$ replacé par $\mathbb{Z}$) on sait que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{dt} = ||f||^2_{L^2([0,2\pi])} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< c_n(f), e_n >|^2 =$$

$$= |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=-1}^{-\infty} |c_n(f)|^2.$$

Vu que f est une fonction continue, alors $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{dt}$ est une quantité finie, donc les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} |c_n|^2$$

convergent. En particulier, cela implique que

$$\lim_{n\to+\infty} |c_n|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to-\infty} |c_n|^2 = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to-\infty} c_n = 0.$$

Exercice 7.4 (1) *Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π-périodique définie par*

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in [-\pi, \pi[\\ f & 2\pi\text{-periodique.} \end{cases}$$

En utilisant l'Exercice 7.1, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a:

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\,\mathrm{dt}\,.$$

Pour $n = 0$, on a

$$c_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\Big) = 0.$$

Pour $n \neq 0$, si on fait une intégration par parties on a:

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{te^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{-in}\,\mathrm{dt} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{te^{-int}}{-in} - \frac{e^{-int}}{(-in)(-in)}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{tie^{-int}}{n} + \frac{e^{-int}}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\pi i(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{-\pi i(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\pi i(-1)^n}{n} = \frac{\sqrt{2\pi} i(-1)^n}{n}.$$

Exercice 7.4 (2) *Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π-périodique définie par*

$$g(t) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, \pi[\\ -1 & \text{si} \quad t \in [-\pi, 0[\\ g & 2\pi\text{-periodique.} \end{cases}$$

Encore en utilisant l'Exercice 7.1, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a:

$$c_n(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} e^{-int}\,\mathrm{dt} - \int_{-\pi}^{0} e^{-int}\,\mathrm{dt} \right).$$

Pour $n = 0$, on a:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} \mathrm{dt} - \int_{-\pi}^{0} \mathrm{dt} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\pi - \pi) = 0.$$

Pour $n \neq 0$, on a:

$$c_n(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} e^{-int}\,\mathrm{dt} - \int_{-\pi}^{0} e^{-int}\,\mathrm{dt} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(-1)^n - 1}{-in} - \frac{1 - (-1)^n}{-in} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2i}{n} \left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} i}{\sqrt{\pi} n} \left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -2\sqrt{2}i/(\sqrt{\pi}n) & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Exercice 7.4 (3) *Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π-périodique définie par*

$$h(t) = \begin{cases} |t| & \text{si} \quad t \in [-\pi, \pi[\\ h & 2\pi\text{-periodique.} \end{cases}$$

Encore en utilisant l'Exercice 7.1, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a:

$$c_n(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-int} \, \mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} t e^{-int} \, \mathrm{dt} - \int_{-\pi}^{0} t e^{-int} \, \mathrm{dt} \right).$$

Si $n = 0$, on a:

$$c_0(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} t \, \mathrm{dt} - \int_{-\pi}^{0} t \, \mathrm{dt} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi^2}{2} - 0 - 0 + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

Si $n \neq 0$, en intégrant par parties on a:

$$c_n(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} t e^{-int} \, \mathrm{dt} - \int_{-\pi}^{0} t e^{-int} \, \mathrm{dt} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{ite^{-int}}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{ie^{-int}}{n} \, \mathrm{dt} - \left[\frac{ite^{-int}}{n} \right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} \frac{ie^{-int}}{n} \, \mathrm{dt} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i\pi(-1)^n - 0}{n} - \left[\frac{-e^{-int}}{n^2} \right]_0^{\pi} - \frac{0 - i(-\pi)(-1)^n}{n} + \left[\frac{-e^{-int}}{n^2} \right]_{-\pi}^{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i\pi(-1)^n}{n} - \frac{-(-1)^n + 1}{n^2} - \frac{i\pi(-1)^n}{n} + \frac{-1 + (-1)^n}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} + \frac{-1 + (-1)^n}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -2\sqrt{2}/(\sqrt{\pi} n^2) & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Exercice 7.5 *Calculer la série de Fourier complexe de la fonction*

$$f : t \mapsto \max\{0, \sin(t)\}.$$

En $[0, \pi[$ la fonction $f(t)$ est égale à $\sin(t)$. En $[\pi, 2\pi[$ on a $f(t) = 0$. Donc pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin(t) e^{-int} \, \mathrm{dt}.$$

Si $n = 0$, on a

$$c_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin(t) \, \mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-\cos(t) \Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-(-1) + 1] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Si $n \neq 0$, on a:

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \frac{e^{-it} - e^{it}}{-2i} \cdot e^{-int} \, \mathrm{dt} = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} e^{i(-1-n)t} - e^{i(1-n)t} \, \mathrm{dt}.$$

Maintenant il faut considérer les cas suivants:

(A) si $n = 1$, alors:

$$\begin{aligned} c_1(f) &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi e^{-2it} - 1 \,\mathrm{dt} = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{e^{-2it}}{-2i} \right]_0^\pi - \pi \right) = \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{1-1}{-2i} - \pi \Big) = -\frac{i\pi}{2\sqrt{2\pi}} = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(B) si $n = -1$, on a:

$$\begin{aligned} c_{-1}(f) &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi 1 - e^{2it} \,\mathrm{dt} = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left(\pi - \left[\frac{e^{2it}}{2i} \right]_0^\pi \right) = \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \Big(\pi - \frac{1-1}{2i} \Big) = \frac{i\pi}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(C) si $n \neq -1, 0, 1$ on a $-1 - n \neq 0$ et $1 - n \neq 0$, donc on peut écrire:

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi e^{i(-1-n)t} - e^{i(1-n)t} \,\mathrm{dt} = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i} \left[\frac{e^{i(-1-n)t}}{-1-n} - \frac{e^{i(1-n)t}}{1-n} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(-1)^{-1-n}}{-1-n} - \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{-1-n} + \frac{1}{1-n} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(-1)^n \cdot (1-n+1+n)}{1-n^2} + \frac{1-n+1+n}{1-n^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2(-1)^n + 2}{1-n^2} = \frac{(-1)^n + 1}{\sqrt{2\pi}(1-n^2)} = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\sqrt{2\pi}(n^2-1)}. \end{aligned}$$

Exercice 7.6 *Calculer la série de Fourier de la fonction* $f : x \mapsto \sin^2(2x)$.

On peut calculer directement tous les coefficients. Une autre méthode est celle-ci: on sait que

$$\cos(4x) = \cos(2x)\cos(2x) - \sin(2x)\sin(2x).$$

Donc

$$\cos^2(2x) = \cos(4x) + \sin^2(2x). \tag{0.3}$$

Donc

$$\sin^2(2x) = 1 - \cos^2(2x) \overset{(0.3)}{=} 1 - \cos(4x) - \sin^2(2x).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sin^2(2x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(4x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{i4x}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{-i4x}}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot e_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot e_4 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot e_{-4}. \end{aligned}$$

Vu que les éléments $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormée de $L^2([0, 2\pi])$, alors on a

$$c_0(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}, \quad c_4(f) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad c_{-4}(f) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

et $c_n(f) = 0$ pour tous $n \neq -4, 0, 4$.

Exercice 7.7(1) *Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f 2π-périodique telle que $f(t) = t^2$ pour $t \in [0, 2\pi[$.*

Remarque préliminaire: la fonction f n'est pas continue partout (elle n'est pas continues dans tous le point t de la forme $t = 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$). Cela va jouer un rôle important dans l'Exercice 7.7(2)!

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} t^2 e^{-int} \, \mathrm{dt} \, .$$

Pour $n = 0$ on a:

$$c_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} t^2 \, \mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3\sqrt{2\pi}} = \frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}}{3}.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ on a (en utilisant intégrations par parties deux fois):

$$\begin{aligned}
c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} t^2 e^{-int} \, \mathrm{dt} = \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{t^2 e^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{2te^{-int}}{-in} \, \mathrm{dt} \right) = \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{it^2 e^{-int}}{n} \right]_0^{2\pi} - \left[\frac{2te^{-int}}{(-in)(-in)} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-int}}{(-in)(-in)} \, \mathrm{dt} \right) = \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{it^2 e^{-int}}{n} + \frac{2te^{-int}}{n^2} + \frac{2e^{-int}}{(-in)(-n^2)} \right]_0^{2\pi} = \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-int} \cdot \left(\frac{it^2}{n} + \frac{2t}{n^2} + \frac{2}{in^3} \right) \right]_0^{2\pi} = \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4\pi^2 i}{n} + \frac{4\pi}{n^2} - \frac{2i}{n^3} - 0 - 0 + \frac{2i}{n^3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4\pi^2 i}{n} + \frac{4\pi}{n^2} \right).
\end{aligned}$$

Exercice 7.7(2) *En utilisant l'Exercice 7.7(1) déduire les sommes des séries suivantes:*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

On a la tentation de replacer quelque valeur de t dans la série de Fourier de f, mais il faut faire attention parce que f n'est pas continue partout. On rappelle que si f est continue dans un point t, alors on a

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} \tag{0.4}$$

mais si f n'est pas continue en t, la seule formule qu'on peut appliquer est celle-ci:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}. \tag{0.5}$$

Ici:

- on note $f(t^+)$ la limite "à droite", c'est-à-dire $\lim_{s\to t, s>t} f(s)$;
- on note $f(t^-)$ la limite "à gauche", c'est-à-dire $\lim_{s\to t, s<t} f(s)$.

Si f est continue en t, alors la limite "à droite" et celle "à gauche" en t sont égales à $f(t)$, donc (0.5) est simplement la formule (0.4). Maintenant on va appliquer (0.5) pour $t=0$ (on s'aperçoit que f n'est pas continue en $t=0$, donc on ne peut pas appliquer (0.4)). On a:

$$f(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad f(0^-) = 4\pi^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
2\pi^2 = \frac{0+4\pi^2}{2} &= \frac{f(0+)+f(0^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{0in} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\sum_{n<0} c_n(f) + c_0(f) + \sum_{n>0} c_n(f)\Big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n<0}\Big(\frac{4\pi^2 i}{n} + \frac{4\pi}{n^2}\Big) + \frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n>0}\Big(\frac{4\pi^2 i}{n} + \frac{4\pi}{n^2}\Big)\Big] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n<0} \frac{4\pi}{n^2} + \frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n>0} \frac{4\pi}{n^2}\Big] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}}{3} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n>0} \frac{4\pi}{n^2}\Big] = \frac{4\pi^2}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{n>0}\frac{4\pi}{n^2} = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Donc:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Maintenant on considère le point $t=\pi$. Dans ce point la fonction f est continue, donc on peut utiliser l'égalité (0.4). Donc on a:

$$\begin{aligned}
\pi^2 = f(\pi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(-1)^n = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\sum_{n<0} c_n(f)(-1)^n + c_0(f) + \sum_{n>0} c_n(f)(-1)^n\Big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\sum_{n<0}\frac{4\pi^2 i(-1)^n}{n} + \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}\Big) + \\
&+ \frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\sum_{n>0}\frac{4\pi^2 i(-1)^n}{n} + \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}\Big)\Big] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n<0}\frac{4\pi(-1)^n}{n^2} + \frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n>0}\frac{4\pi(-1)^n}{n^2}\Big] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}}{3} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n>0}\frac{4\pi(-1)^n}{n^2}\Big] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{4\pi^2}{3} - 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Donc on a:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi^2}{3} - \pi^2\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Maintenant il faut calculer la derniere serie. Si on utilise l'égalité de Parseval (avec $\mathbb{N}$ replacé par $\mathbb{Z}$), on a:

$$||f||^2_{L^2([0,2\pi])} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Maintenant on a:

$$||f||^2_{L^2([0,2\pi])} = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} t^4 \,\mathrm{dt} = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{2\pi} = \frac{32\pi^5}{5}.$$

En plus, on a:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \left(\frac{4\pi^2\sqrt{2\pi}}{3}\right)^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{4\pi^2 i}{n} + \frac{4\pi}{n^2}\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{32\pi^5}{9} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{16\pi^4}{n^2} + \frac{16\pi^2}{n^4}\right) = \frac{32\pi^5}{9} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \left(\frac{8\pi^3}{n^2} + \frac{8\pi}{n^4}\right) =$$

$$= \frac{32\pi^5}{9} + 2\cdot 8\pi^3 \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} + 2\cdot 8\pi \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} =$$

$$= \frac{32\pi^5}{9} + 16\pi^3\cdot\frac{\pi^2}{6} + 16\pi\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{32\pi^5}{9} + \frac{8\pi^5}{3} + 16\pi\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}.$$

Donc

$$16\pi\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{32\pi^5}{5} - \frac{32\pi^5}{9} - \frac{8\pi^5}{3} = \frac{288-160-120}{45}\cdot\pi^5 = \frac{8\pi^5}{45}.$$

Donc

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 7.8(1) *Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f 2π-périodique telle que $f(t) = e^t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$*

En utilisant l'Exercice 7.1, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$c_f(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{t(1-in)}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{\pi(1-in)} - e^{\pi(in-1)}}{1-in} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{\pi(1-in)} - e^{\pi(in-1)}}{1-in}\cdot\frac{1+in}{1+in} = \frac{1+in}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n}{1+n^2} =$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2}.$$

Exercice 7.8(2) *En utilisant l'Exercice 7.8(1) déduire les sommes des séries suivantes:*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

On veut utiliser la série de Fourier de f pour $t=\pi$. Dans ce point f n'est pas continue, donc il faut appliquer l'égalité (0.5). On a:

$$f(\pi^-)=e^{\pi} \quad \text{et} \quad f(\pi^+)=e^{-\pi}.$$

Donc en replaçant $t=\pi$ en (0.5) on a:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)(-1)^n = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\cdot\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2} = \\
&= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1+in}{1+n^2} = \\
&= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\Big[\Big(\sum_{n<0}\frac{1}{1+n^2}+\frac{in}{1+n^2}\Big)+1+\Big(\sum_{n>0}\frac{1}{1+n^2}+\frac{in}{1+n^2}\Big)\Big] = \\
&= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\Big[\Big(\sum_{n<0}\frac{1}{1+n^2}\Big)+1+\Big(\sum_{n>0}\frac{1}{1+n^2}\Big)\Big] = \\
&= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\Big[1+2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2}\Big].
\end{aligned}$$

Donc

$$\pi\cdot\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = 1+2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2},$$

donc

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\pi\cdot\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-1\right) = \frac{1}{2}\left(\pi\,\mathrm{cotanh}(\pi)-1\right)\simeq 1.08.$$

Si on veut calculer la deuxième série, on peut prendre $t=0$. Vu que f est continue en $t=0$, on peut utiliser l'égalité (0.4), donc on a:

$$\begin{aligned}
1=f(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2} = \\
&= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2} = \\
&= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\Big[\Big(\sum_{n<0}\frac{(-1)^n}{1+n^2}+\frac{in(-1)^n}{1+n^2}\Big)+1+\Big(\sum_{n>0}\frac{(-1)^n}{1+n^2}+\frac{in(-1)^n}{1+n^2}\Big)\Big] = \\
&= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\Big[\Big(\sum_{n<0}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\Big)+1+\Big(\sum_{n>0}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\Big)\Big] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \Big[1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \Big].$$

Donc

$$\frac{2\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - 1 \right) = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2} \simeq -0.36.$$

Exercice 7.9(1) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \max\{\sin(x), 0\}$. Déterminer les coefficients de Fourier de f.*

Voir Exercice 7.5.

Exercice 7.9(2) *En utilisant l'Exercice 7.9(1) déduire la somme de la série*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

On rappelle qu'on a déjà calculé les coefficients:

$$c_{-1}(f) = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}, \quad c_0(f) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \quad c_1(f) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

et pour tout $n \neq -1, 0, 1$:

$$c_n(f) = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\sqrt{2\pi}(n^2 - 1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -\sqrt{2}/(\sqrt{\pi}(n^2-1)) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \tag{0.6}$$

Maintenant on utilise le fait que f est continue pour tous les point $t \in \mathbb{R}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\sqrt{2\pi} f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} =$$

$$= \Big(\sum_{-\infty}^{n=-2} c_n(f) e^{int} \Big) + \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot e^{-it} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot e^{it} + \Big(\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(f) e^{int} \Big).$$

Pour tout $n \geq 2$ on a $c_n(f) = c_{-n}(f)$ (voir (0.6)). Donc on a

$$\sum_{-\infty}^{n=-2} c_n(f) e^{int} = \sum_{\infty}^{k=2} c_{-k}(f) e^{-ikt} = \sum_{\infty}^{k=2} c_k(f) e^{-ikt} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} c_k(f) e^{-ikt} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n(f) e^{-int}.$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\sqrt{2\pi} f(t) = \Big(\sum_{n \leq -2} c_n(f) e^{int} \Big) + \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot e^{-it} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot e^{it} + \Big(\sum_{n \geq 2} c_n(f) e^{int} \Big) =$$

$$= \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot e^{-it} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot e^{it} + \Big(\sum_{n=2}^{\infty} c_n(f)(e^{int} + e^{-int}) \Big). \tag{0.7}$$

Si on prend $t = 0$ et on replace en (0.7), on a

$$0 = \sqrt{2\pi} f(0) = \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + \sum_{n=2}^{\infty} 2c_n(f) \overset{(0.6)}{=}$$

$$\overset{(0.6)}{=} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - 2 \cdot \sum_{n=2, n \text{ pair}}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(n^2-1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Big(1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\Big) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}\Big).$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)} = \frac{1}{2}.$$

Si on cherche la somme qui commence avec $n = 0$, on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 7.9(3) *Retrouver le résultat de l'Exercice 7.9(2) par un argument élémentaire, en utilisant le fait que*

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right). \tag{0.8}$$

Vu qu'on a (0.8), pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2(n-1)+1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}\Big).$$

Maintenant pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$r_n := \frac{1}{2n+1}.$$

Donc on a:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{k-1} r_n - \sum_{n=1}^{k} r_n\Big) = \frac{1}{2}(r_0 - r_k) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7.10 *Montrer (en utilisant l'égalité de Parseval) que si deux fonctions continues 2π-périodiques ont la même série de Fourier, alors elles sont égales.*

Normalement l'égalité de Parseval est écrite avec $n \in \mathbb{N}$ si la base orthonormée de l'espace de Hilbert H est indexé par $\mathbb{N}$. Si $H = L^2([0, 2\pi])$, alors la base orthonormée qu'on utilise toujours est indexé par $\mathbb{Z}$. Donc pour chaque $h \in L^2([0, 2\pi])$ on a:

$$||h||^2_{L^2([0,2\pi])} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(h)|^2.$$

Maintenant on fixe deux fonctions f, g continues, 2π-périodiques et avec la même série de Fourier complexe (c'est-à-dire avec les mêmes coefficients de Fourier complexes). Par linéarité des coefficients de Fourier, on a

$$c_n(f - g) = c_n(f) - c_n(g) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Donc si on prend $h := f - g$, on a:

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 \,\mathrm{dt} = ||f - g||^2_{L^2([0,2\pi])} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f - g)|^2 = 0.$$

Vu que f et g sont continues, aussi $f - g$ est continue. Donc l'égalité qu'on a écrit implique que $f - g$ est égale à zéro sur $[0, 2\pi]$. Donc $f(t) = g(t)$ pour chaque $t \in [0, 2\pi]$. Vu que f et g sont 2π-périodiques, on a que $f(t) = g(t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

Remarque: si $f - g$ n'était pas continue, alors on ne pouvait pas dire que $f - g = 0$ sur $[0, 2\pi]$. Par exemple, on peut considérer $f = 0$ sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = 1$ pour tout $x = 2k\pi$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$) et $g(t) = 0$ ailleurs. Alors f et g ont le même coefficients de Fourier complexes ($c_n(f) = 0 = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$), mais $f \neq g$.

Exercice 7.11(1) *Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1 et de moyenne nulle. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a*

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|}$$

(on pourra utiliser la relation entre les coefficients des Fourier de f et de sa dérivée).

Vu que f est de classe C^1, alors on a:

$$c_n(f') = inc_n(f) \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

donc:

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{|n|} \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}.$$

Vu que f est de moyenne nulle, alors on a:

$$c_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \,\mathrm{dt} = 0.$$

Vu que f est continue, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a:

$$|f(t)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}} c_n(f) e^{int} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n(f)e^{int}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|}.$$

Exercice 7.11(2) *En utilisant l'Exercice 7.11(1) déduire que*

$$\sup_{\mathbb{R}} |f|^2 \leq \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{dt}$$

(on pourra admettre et utiliser le fait que $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$, voir Exercice 7.7(2)).

En utilisant l'Exercice 7.11(1), on a:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|} \right)^2. \tag{0.9}$$

Maintenant on considère l'espace de Hilbert réel $l^2(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\mathbb{R})$, défini comme l'espace de toutes les suites

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \subset \mathbb{R},$$

telles que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n^2$$

est convergente. Sur $l^2(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\mathbb{R})$ on a un produit scalaire definit comme suit:

$$< a, b >:= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n b_n$$

pour tout $a, b \in l^2(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\mathbb{R})$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas réel (voir la Proposition 1.2 du Chapitre 3), on a:

$$< a, b >^2 \leq < a, a > \cdot < b, b >,$$

c'est-à-dire:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n b_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n^2 \right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} b_n^2 \right) \tag{0.10}$$

pour tout $a = \{a_n\}_n, b = \{b_n\}_n \in l^2(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\mathbb{R})$. On veut appliquer (0.10) pour le cas où

$$a_n := \frac{1}{|n|}, \qquad b_n := |c_n(f')| \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Pour cela, il faut montrer que a et b sont dans $l^2(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\mathbb{R})$. Pour a, on a:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \overset{(*)}{=} 2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} < +\infty,$$

où $(*)$ est une consequence de l'Exercice 7.7(2). Pour b on a:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} b_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n(f')|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \overset{(*)}{=}$$

$$\stackrel{(*)}{=} ||f'||^2_{L^2([0,2\pi])} = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{dt} < +\infty,$$

où $(*)$ est une consequence de l'égalité de Parseval (avec $\mathbb{N}$ replacé par $\mathbb{Z}$) et le dernier inégalité est une consequence du fait que f' est continue parce que f est de classe C^1. Donc a et b sont dans $l^2(\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R})$. Donc en appliquant (0.10) on a:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|}\right)^2 &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} |c_n(f')|^2\right) \leq \\ &\leq \left(2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2\right) = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot ||f'||^2_{L^2([0,2\pi])} = \\ &= \frac{\pi^2}{3} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{dt} \end{aligned} \tag{0.11}$$

Si on met ensemble (0.9) et (0.11), on obtient:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|}\right)^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^2}{3} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{dt} \,.\end{aligned}$$

Exercice 7.12 *Soit $L > 0$ et $\lambda > 0$. Déterminer toutes les fonctions L-périodiques de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, qui vérifient l'équation différentielle*

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0. \tag{0.12}$$

On veut se ramener aux cas des fonctions 2π-périodiques. Donc on essaie de trouver une fonction

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad u \ 2\pi\text{-periodique}, \tag{0.13}$$

telle que

$$y(t) = u\left(t \cdot \frac{2\pi}{L}\right). \tag{0.14}$$

On note que y est de classe C^2 si et seulement si u est de classe C^2. En plus, si u est 2π-périodique, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a:

$$y(t+L) = u\left(t \cdot \frac{2\pi}{L} + L \cdot \frac{2\pi}{L}\right) = u\left(t \cdot \frac{2\pi}{L} + 2\pi\right) = u\left(t \cdot \frac{2\pi}{L}\right) = y(t),$$

donc y est L-périodique. Aussi le contraire est vrai, donc on a:

$$\{u \text{ est de classe } C^2 \text{ et } 2\pi\text{-periodique}\} \Longleftrightarrow \{y \text{ est de classe } C^2 \text{ et } L\text{-periodique}\}.$$

Si on utilise (0.14), on a:

$$y'(t) = \frac{2\pi}{L} \cdot u'\left(t \cdot \frac{2\pi}{L}\right) \quad \text{et} \quad y''(t) = \frac{4\pi^2}{L^2} \cdot u''\left(t \cdot \frac{2\pi}{L}\right).$$

Donc si on replace en (0.12), on est en train de chercher u comme en (0.13) et telle que:

$$\frac{4\pi^2}{L^2} \cdot u''\left(t \cdot \frac{2\pi}{L}\right) + \lambda u\left(t \cdot \frac{2\pi}{L}\right) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cette égalité est équivalente à:

$$u''(x) + \frac{\lambda L^2}{4\pi^2} \cdot u(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{0.15}$$

Donc on a:

$$\{u \text{ est de classe } C^2, \text{ elle est } 2\pi\text{-periodique et elle satisfait } (0.15)\} \iff$$
$$\iff \{y \text{ est de classe } C^2, \text{ elle est } L\text{-periodique et elle satisfait } (0.12)\}.$$

Donc maintenant il faut trouver $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de classe C^2, 2π-périodique et telle que (0.15) est vérifiée. Si u est 2π-périodique, alors on peut écrire la série de Fourier complexe de u:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u)e^{int} \tag{0.16}$$

(cette égalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$ si u est continue, en particulier elle est vraie si u est de classe C^2). En utilisant la Proposition 5.1 du Chapitre 4, les coefficients de $u'(t)$ sont donnés par $inc_n(u)$, c'est-à-dire:

$$u'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n(u)e^{int}.$$

Vu qu'on cherche u de classe C^2, alors u' est (au moins) de classe C^1, donc on peut appliquer la Proposition 5.1 du Chapitre 4 une deuxième fois. Donc les coefficients de $u''(t)$ sont donnés par $(in)(in)c_n(u) = -n^2c_n(u)$, c'est-à-dire:

$$u''(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2c_n(u)e^{int} \tag{0.17}$$

(encore une fois, cette égalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$ si u est de classe C^2). Si on replace (0.16) et (0.17) en (0.15) on obtient:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(-n^2 + \frac{\lambda L^2}{4\pi^2}\right) c_n(u)\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} = 0. \tag{0.18}$$

On sait que la famille $\{e^{int}/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base (orthonormée) de l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$. Donc (0.18) implique que

$$\left(-n^2 + \frac{\lambda L^2}{4\pi^2}\right) c_n(u) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{0.19}$$

Par hypothèse, on a $\lambda > 0$ et $L > 0$. On a deux cas à considérer séparément:

(A) il existe a $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{\sqrt{\lambda}L}{2\pi} = n_0. \tag{0.20}$$

(B) il n'y aucun $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (0.20) est satisfaite.

(A): on suppose qu'il y a $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (0.20) est satisfaite. Dans ce cas, nécessairement n_0 est le seul nombre avec cette propriété; en plus, $n_0 \neq 0$ parce que $\lambda > 0$ et $L > 0$. Donc:

$$-n^2 + \frac{\lambda L^2}{4\pi^2} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-n_0, n_0\}$$

donc en utilisant (0.19) on a

$$c_n(u) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-n_0, n_0\}$$

En plus, $c_{n_0}(u)$ et $c_{-n_0}(u)$ peuvent avoir deux valeurs en $\mathbb{C}$ quelconques. Donc on a:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u) e^{int} = \frac{c_{-n_0}(u)}{\sqrt{2\pi}} e^{-in_0 t} + \frac{c_{n_0}(u)}{\sqrt{2\pi}} e^{in_0 t}.$$

Vu que $c_{n_0}(u)$ et $c_{-n_0}(u)$ peuvent avoir une valeur en $\mathbb{C}$ quelconque, alors aussi $c_{-n_0}(u)/\sqrt{2\pi}$ et $c_{n_0}(u)/\sqrt{2\pi}$ peuvent avoir deux valeurs en $\mathbb{C}$ quelconques. Donc une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 et 2π-périodique est une solution de (0.15) si et seulement si

$$u(t) = \alpha e^{-in_0 t} + \beta e^{in_0 t} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Autrement dit, l'espace E des fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2, 2π-périodiques et qui sont solution de (0.15) est isomorphe à l'espace $\mathbb{C}^2$ (parce que chaque fonction u dépend de deux paramètres complexes), donc E a dimension réelle 4.

Si on replace en (0.14), on obtient que une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ de classe C^2 et L-périodique est une solution de (0.12) si et seulement si

$$y(t) = \alpha e^{-i2n_0\pi t/L} + \beta e^{i2n_0\pi t/L} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

En utilisant (0.20), une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ de classe C^2 et L-périodique est une solution de (0.12) si et seulement si

$$y(t) = \alpha e^{-i\sqrt{\lambda}t} + \beta e^{i\sqrt{\lambda}t} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(B): on suppose qu'il n'y aucun $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (0.20) est satisfaite. Alors on a

$$-n^2 + \frac{\lambda L^2}{4\pi^2} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Donc $c_n(u) = 0$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$. Donc

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u) e^{int} = 0.$$

Autrement dit, dans le cas (B) seulement la seule fonction 2π-périodique et telle que (0.15) est satisfaite est la fonction nulle. Donc la seule fonction L-périodique et telle que (0.12) est satisfaite est la fonction nulle (en particulier, l'espace des fonctions y qu'on cherchait a dimension égale à zéro).

Exercice 7.13(1) *Écrire la décomposition en série de Fourier complexe de la fonction de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\pi] \text{ et } y \in [0,\pi] \\ 0 & \text{si } x \in]\pi, 2\pi[\text{ ou } y \in]\pi, 2\pi[\\ & f \;\; 2\pi \times 2\pi\text{-periodique.} \end{cases}$$

Par définition, pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$ on a:

$$c_{k,l}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)e^{-ikx}e^{-ily}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikx}e^{-ily}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Donc on a:

$$c_{0,0}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Si $k = 0$ et $l \neq 0$, on a

$$c_{0,l}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{dx}\cdot\int_0^{\pi} e^{-ily}\,\mathrm{dy} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot\left[\frac{e^{-ily}}{-il}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^l-1}{-il} = \frac{i}{2l}\cdot\left((-1)^l-1\right).$$

Dans la même manière si $k \neq 0$ et $l = 0$, on a:

$$c_{k,0}(f) = \frac{i}{2k}\cdot\left((-1)^k-1\right).$$

Si $k \neq 0$ et aussi $l \neq 0$, on a:

$$c_{k,l}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikx}e^{-ily}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(-1)^k-1}{k}\cdot\frac{(-1)^l-1}{l}.$$

Donc $c_{k,l} = 0$ si k est pair ou si l est pair.

Exercice 7.13(2) *Écrire la décomposition en série de Fourier complexe de la fonction de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

$$g(x,y) := \begin{cases} x+y & \text{si } (x,y)\in[0,2\pi[\times[0,2\pi[\\ & g\ \ 2\pi\times 2\pi\text{-periodique.}\end{cases}$$

Pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$ on a:

$$c_{k,l}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+y)e^{-ikx}e^{-ily}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\int_0^{2\pi} xe^{-ikx}\,\mathrm{dx}\cdot\int_0^{2\pi} e^{-ily}\,\mathrm{dy} + \int_0^{2\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{dx}\cdot\int_0^{2\pi} ye^{-ily}\,\mathrm{dy}\right). \tag{0.21}$$

Maintenant on va calculer séparément toutes les intégrales. Si $k \neq 0$, en intégrant par partie on a:

$$\int_0^{2\pi} xe^{-ikx}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{xe^{-ikx}}{-ik}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,\mathrm{dx} =$$
$$= \frac{2\pi-0}{-ik} - \left[\frac{e^{-ikx}}{(-ik)(-ik)}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi i}{k} - \frac{1-1}{-k^2} = \frac{2\pi i}{k}. \tag{0.22}$$

Si $k \neq 0$ on a aussi:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_0^{2\pi} = \frac{1-1}{-ik} = 0. \tag{0.23}$$

De la même façon, si $l \neq 0$ on a:

$$\int_0^{2\pi} ye^{-ily}\,\mathrm{dy} = \frac{2\pi i}{l} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} e^{-ily}\,\mathrm{dy} = 0.$$

Si on replace en (0.21), pour tout (k,l) tels que $k \neq 0$ et $l \neq 0$ on a

$$c_{k,l}(g) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{2\pi i}{k} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2\pi i}{l} \right) = 0.$$

Donc il faut seulement calculer les coefficients $c_{k,l}$ avec $k = 0$ ou $l = 0$. On a:

$$c_{0,0}(g) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{dx} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{dy} + \int_0^{2\pi} \mathrm{dx} \cdot \int_0^{2\pi} y\,\mathrm{dy} \right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} \cdot 2\pi + 2\pi \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2\pi} \right) = 4\pi^2.$$

Si $k \neq 0$ et $l = 0$, on a:

$$c_{k,0}(g) \overset{(0.21)}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{2\pi} xe^{-ikx}\,\mathrm{dx} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{dy} + \int_0^{2\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{dx} \cdot \int_0^{2\pi} y\,\mathrm{dy} \right) \overset{(0.22),(0.23)}{=}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi i}{k} \cdot 2\pi + 0 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2\pi} \right) = \frac{2\pi i}{k}.$$

De la même façon, si $k = 0$ et $l \neq 0$ on a:

$$c_{0,l}(g) = \frac{2\pi i}{l}.$$

Donc on a:

$$c_{k,l}(g) = \begin{cases} 4\pi^2 & \text{si } k = l = 0 \\ 2\pi i/k & \text{si } k \neq 0 \text{ et } l = 0 \\ 2\pi i/l & \text{si } k = 0 \text{ et } l \neq 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \text{ et } l \neq 0. \end{cases}$$

Exercice 7.14 *On considère deux fonctions $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ continues et C^1 par morceaux, et on note $f \otimes g$ la fonction de $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f \otimes g : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$. Exprimer les coefficients de Fourier de $f \otimes g$ en fonction de ceux de f et de g.*

Pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$ on a:

$$c_{k,l}(f \otimes g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x)g(y)e^{-ikx}e^{-ily}\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{dx} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} g(y)e^{-ily}\,\mathrm{dy} \right) = c_k(f) \cdot c_l(g).$$

Mathematics Research Unit
University of Luxembourg
6, rue Richard Coudenhove-Kalergi
L-1359 Luxembourg

website: http://matteotommasini.altervista.org/

email: matteo.tommasini2@gmail.com