ANALYSE 3B - TRAVAUX DIRIGÉS
CHAPITRE 3 - ESPACES DE HILBERT

MATTEO TOMMASINI

Si vous trouvez des erreurs de français (très probable) ou de mathématiques (moins improbable, mais pas impossible), dite-le-moi, merci!

Exercice 9.1(1) *On se place dans $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées z_1, z_2 usuelles. On considère les applications suivantes. Dire lesquelles sont sesquilineaires et lesquelles définissent un produit scalaire hermitien. On note ici $z = (z_1, z_2)$ et $z' = (z'_1, z'_2)$.*

(1) $b(z, z') = z_1 z_2 + z'_1 z'_2$;
(2) $b(z, z') = z_1 z'_1 + z_2 z'_2$;
(3) $b(z, z') = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2}$;
(4) $b(z, z') = z_1 z'_2 + z_2 z'_1$;
(5) $b(z, z') = z_1 \overline{z'_2} + z_2 \overline{z'_1}$.

(1) b n'est pas linéaire dans la première variable parce pour tout $\mu \in \mathbb{C}$ on a:

$$b(\mu z, z') = \mu^2 z_1 z_2 + z'_1 z'_2$$

au lieu de

$$b(\mu z, z') = \mu z_1 z_2 + \mu z'_1 z'_2.$$

(2) b n'est pas antilinéaire dans la deuxième variable parce pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a:

$$b(z, \lambda z') = \lambda z_1 z'_1 + \lambda z_2 z'_2$$

au lieu de

$$b(z, z') = \overline{\lambda} z_1 z'_1 + \overline{\lambda} z_2 z'_2.$$

(3) l'application b est sesquilineaire, c'est-à-dire elle est linéaire dans la première variable et antilinéaire dans la deuxième variable. En plus, elle est hermitienne parce que pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^2$ on a:

$$b(z', z) = z'_1 \overline{z_1} + z'_2 \overline{z_2} = \overline{\overline{z'_1} z_1 + \overline{z'_2} z_2} = \overline{b(z, z')}.$$

En plus, pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ on a:

$$b(z, z) = z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2^2|,$$

donc $b(z, z) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$. Donc b est un produit scalaire (hermitien).

(4) b n'est pas antilinéaire dans la deuxième variable parce que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$b(z, \lambda z') = \lambda z_1 z'_2 + \lambda z_2 z'_1$$

Date: December 5, 2014.

au lieu de

$$b(z,\lambda z') = \overline{\lambda} z_1 z_2' + \overline{\lambda} z_2 z_1'.$$

(5) L'application b est sesquilinéaire, mais elle n'est past un produit scalaire parce que

$$b\left((0,1),(0,1)\right) = 0$$

mais $(0,1) \neq (0,0)$.

Exercice 9.2 *Les fonctions suivantes définissent-t-elles des distances sur* $\mathbb{R}^2$*?*

(1) $d((x,y),(x',y')) = |x'-x| + |y'-y|$.
(2) $d((x,y),(x',y')) = \max\{|x'-x|, |y'-y|\}$.
(3) $d((x,y),(x',y')) = \min\{|x'-x|, |y'-y|\}$.

(1a) si $|x'-x| + |y'-y| = 0$, alors $|x'-x| = 0 = |y'-y|$, donc $(x,y) = (x',y')$;

(1b) pour tout (x,y) et (x',y') en $\mathbb{R}^2$ on a

$$d((x,y),(x',y')) = |x'-x| + |y'-y| = |x-x'| + |y-y'| = d((x',y'),(x,y));$$

(1c) pour tout (x,y), (x',y') et (x'',y'') en $\mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} d((x,y),(x'',y'')) = |x''-x| + |y''-y| &\leq |x''-x'| + |y''-y'| + |x'-x| + |y'-y| = \\ &= d((x,y),(x',y')) + d((x',y'),(x'',y'')), \end{aligned}$$

donc d est une distance.

(2a) si $\max\{|x'-x|, |y'-y|\} = 0$, alors $|x'-x| = 0 = |y'-y|$, donc $(x,y) = (x',y')$;

(2b) pour tout (x,y) et (x',y') en $\mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{gathered} d((x,y),(x',y')) = \max\{|x'-x|, |y'-y|\} = \\ = \max\{|x-x'|, |y-y'|\} = d((x',y'),(x,y)); \end{gathered}$$

(2c) pour tout $A,B,C,D \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on a:

$$\max\{A+B, C+D\} \leq \max\{A,C\} + \max\{B,D\},$$

donc pour tout (x,y), (x',y') et (x'',y'') on a

$$\begin{gathered} d((x,y),(x'',y'')) = \max\{|x''-x|, |y''-y|\} \leq \\ \leq \max\{|x'-x| + |x''-x'|, |y'-y| + |y''-y'|\} \leq \\ \leq \max\{|x'-x|, |y'-y|\} + \max\{|x''-x'|, |y''-y'|\} = \\ d((x,y),(x',y')) + d((x',y'),(x'',y'')), \end{gathered}$$

donc d est une distance.

(3) d n'est pas une distance parce qu'elle ne vérifie pas la condition (a): par exemple, on a $d((0,0),(1,0)) = 0$, mais $(0,0) \neq (1,0)$.

Exercice 9.3 *Déterminer, parmi les espaces métriques suivantes, lesquels sont complets.*

(1) $]0,\infty[$, muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.
(2) $[0,\infty[$, muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.
(3) $\mathbb{R}^3$, muni de la distance euclidienne usuelle.
(4) $]0,\infty[\times\mathbb{R}$, muni de la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
(5) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, muni de la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

(1) $]0,\infty[$ n'est pas complet: par exemple la suite $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy mais elle n'as pas une limite en $]0,\infty[$ (sa limite est 0, qui n'est pas dans $]0,\infty[$).

(2) $[0,\infty[$ est complet. On peut prouver cela comme suit: on prend une suite de Cauchy $\{x_n\}_n$ quelconque en $[0,\infty[$; si on la considère en $\mathbb{R}$, alors elle a une limite x_∞ (parce $\mathbb{R}$ est complet). Vu $x_n \geq 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, alors on a $x_\infty \geq 0$, donc $x_\infty \in [0,\infty[$. Autrement dit, chaque suite de Cauchy en $[0,\infty[$ a une limite en $[0,\infty[$.

(3) $\mathbb{R}^3$ est complet. Pour prouver ça, on prend une suite de Cauchy $\{x_n\}_n$ quelconque en $\mathbb{R}^3$. Chaque x_n est en $\mathbb{R}^3$, donc on peut écrire

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Maintenant on fixe $\sigma > 0$ quelconque. Vu que $\{x_n\}_n$ est de Cauchy, alors il y a $k(\sigma) \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_{\mathbb{R}^3}(x_n, x_m) < \sigma \quad \forall\, n, m \geq k(\sigma).$$

Donc par définition de distance euclidienne en $\mathbb{R}^3$, on a:

$$|x_n^1 - x_m^1|^2 \leq \sum_{i=1}^{3} |x_n^i - x_m^i|^2 = (d_{\mathbb{R}^3}(x_n, x_m))^2 < \sigma^2 \quad \forall\, n, m \geq k(\sigma),$$

donc

$$d_{\mathbb{R}}(x_n^1, x_m^1) = |x_n^1 - x_m^1| < \sigma \quad \forall\, n, m \geq k(\sigma).$$

Donc la suite $\{x_n^1\}_n$ est une suite de Cauchy en $\mathbb{R}$. Vu que $\mathbb{R}$ est complet, il existe une limite x_∞^1 de $\{x_n^1\}_n$. En particulier, pour chaque $\delta > 0$ il y a $r^1(\delta) \in \mathbb{N}$, tel que

$$|x_n^1 - x_\infty^1| < \delta \quad \forall\, n \geq r^1(\delta).$$

Exactement dans la même façon, on peut montrer que $\{x_n^2\}_n$ et $\{x_n^3\}_n$ sont des suites de Cauchy en $\mathbb{R}$, donc il y a une limite x_∞^2, respectivement x_∞^3. En particulier, pour chaque $\delta > 0$ il y a $r^2(\delta), r^3(\delta) \in \mathbb{N}$, tel que

$$|x_n^2 - x_\infty^2| < \delta \quad \forall\, n \geq r^2(\delta).$$

et

$$|x_n^3 - x_\infty^3| < \delta \quad \forall\, n \geq r^3(\delta).$$

On note $r(\delta) := \max\{r^1(\delta), r^2(\delta), r^3(\delta)\}$ et on note $x_\infty := (x_\infty^1, x_\infty^2, x_\infty^3)$. Donc pour chaque $\delta > 0$ on a

$$d_{\mathbb{R}^3}(x_n, x_\infty) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} |x_n^i - x_\infty^i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \delta^2} = \sqrt{3}\delta \quad \forall\, n \geq r(\delta).$$

En particulier, si on prend prend $\varepsilon > 0$ quelconque et on pose $\delta := \varepsilon/\sqrt{3}$, on a:

$$d_{\mathbb{R}^3}(x_n, x_\infty) < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq r(\varepsilon/\sqrt{3}).$$

Autrement dit, la suite de Cauchy $\{x_n\}_n$ converge à la limite x_∞. Donc $\mathbb{R}^3$ est complet. La même construction montre que $\mathbb{R}^k$ est complet pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

(4) $]0, \infty[\times\mathbb{R}$ n'est pas complet. Il suffit par exemple de considérer la suite $\{(1/n), 0\}_n$. Cette suite est de Cauchy, mais elle n'as pas une limite en $]0, \infty[\times\mathbb{R}$ (sa limite est $(0, 0)$, qui n'est pas en $]0, \infty[\times\mathbb{R}$).

(5) $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$ n'est pas complet. Il suffit de considérer la suite de Cauchy $\{(1/n, 0)\}_n$.

Exercice 9.4 *On considère l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $d(r, r') = |r - r'|$. Est-il complet?*

$\mathbb{Q}$ n'est pas complet: il suffit de considérer une suite de Cauchy en $\mathbb{R}$, convergent à un point de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

Exercice 9.5(1) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $< -, - >$. Montrer que E, muni de la distance associé à $< -, - >$, est complet.*

La démonstration de ce fait est presque la même de la démonstration de l'Exercice 9.3(3), où on a prouvé que $\mathbb{R}^3$ est complet à cause du fait que $\mathbb{R}$ est complet.

Exercice 9.5(2) *Même question de l'Exercice 9.5(1) pour un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien.*

La démonstration de ce fait est presque la même de celle de l'Exercice 9.5(1).

Exercice 9.5(3) *On considère l'espace vectoriel $L^2(\mathbb{R})$ des fonction de carré sommable, c'est-à-dire les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (non nécessairement continues) telles que*

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 \,\mathrm{dt} < +\infty.$$

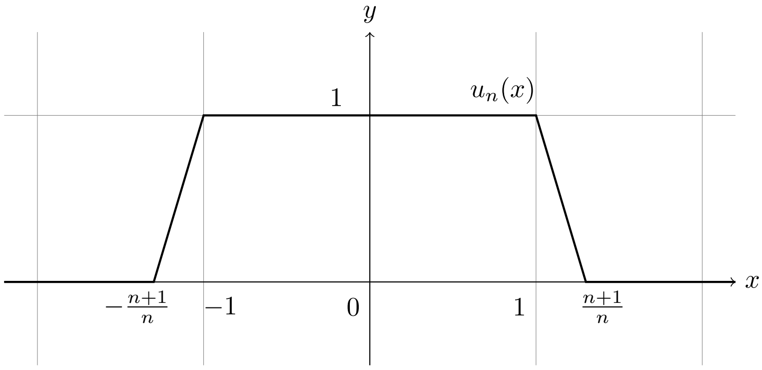
On admet pour l'instant (voir cours) que la fonction

$$\begin{array}{rccc} < -, - >: & L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ & (u, v) & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{v(t)}\,\mathrm{dt} \end{array}$$

définit un produit scalaire hermitien complet *sur $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble E des fonctions continues u de $L^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ mais qu'il n'est pas fermé.*

Si $u, v \in E$, alors $u + v$ est encore une fonction continue. En plus, vu que $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, alors $u + v \in L^2(\mathbb{R})$, donc $u + v \in E$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λu est encore une fonction continue. En plus $\lambda v \in L^2(\mathbb{R})$ parce que $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, donc $\lambda v \in E$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$.

Maintenant il faut montrer que E n'est pas fermé. Autrement dit, il faut trouver une suite de Cauchy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E, telle qu'elle n'as pas une limite en E (note bien: elle a toujours une limite en $L^2(\mathbb{R})$ parce que $L^2(\mathbb{R})$ est complet). Une possibilité simple est celle ci: pour chaque $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on considère la fonction u_n, linéaire par morceaux et définie comme ça:



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une fonction continue. En plus, elle est à support compact, donc $\int_{-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2 < \infty$, donc $u_n \in L^2(\mathbb{R})$, donc on a

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E.$$

Maintenant il faut vérifier si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en E (de manière équivalente il faut verifier si $\{u_n\}_n$ est une suite de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$). Pour tout n, m, on a:

$$d_E(u_n, u_m) = d_{L^2(\mathbb{R})}(u_n, u_m) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |u_n(x) - u_m(x)|^2 \, \mathrm{dx}}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $n \geq m$, donc $1/n \leq 1/m$. Donc on a:

$$-\frac{m+1}{m} \leq -\frac{n+1}{n} < -1 < 1 < \frac{n+1}{n} \leq \frac{m+1}{m}$$

et:

- $u_n(x) = u_m(x)$ pour tout $x \leq -(m+1)/m$;
- $|u_n(x) - u_m(x)| \leq |u_n(x)| + |u_m(x)| \leq 2$ pour tout $-(m+1)/m < x < -1$;
- $u_n(x) = u_m(x)$ pour tout $-1 \leq x < 1$;
- $|u_n(x) - u_m(x)| \leq 2$ pour tout $1 \leq x < -(m+1)/m$;
- $u_n(x) = u_m(x)$ pour tout $x \geq (m+1)/m$.

Donc

$$d_E(u_n, u_m) = \sqrt{\int_{-(m+1)/m}^{-1} |u_n(x) - u_m(x)|^2 \, \mathrm{dt} + \int_1^{(m+1)/m} |u_n(x) - u_m(x)|^2 \, \mathrm{dt}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_{-(m+1)/m}^{-1} 2 \, \mathrm{dt} + \int_1^{(m+1)/m} 2 \, \mathrm{dt}} =$$

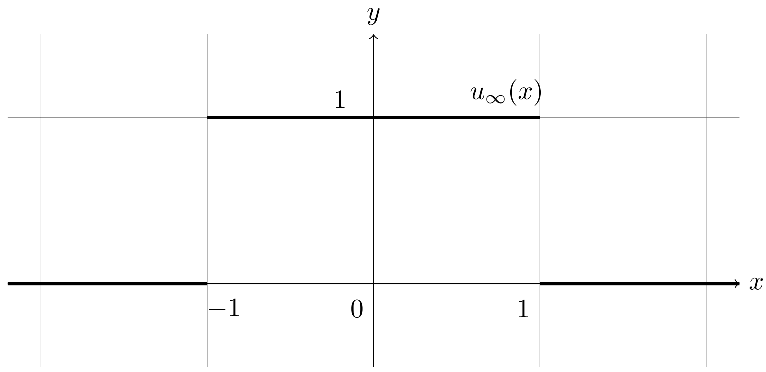
$$= \sqrt{2\left(-1 + \frac{m+1}{m} + \frac{m+1}{m} - 1\right)} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{m}} = \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on note $k(\varepsilon) := \lceil 4/\varepsilon^2 \rceil$ (c'est-à-dire, le plus petit nombre naturel qui est plus grand que $4/\varepsilon^2$). Donc on a:

$$d_E(u_n, u_m) \leq \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq k(\varepsilon).$$

Donc on a prouvé que la suite $\{u_n\}_n$ est une suite de Cauchy en $E \subset L^2(\mathbb{R})$. En particulier, elle a une limite (unique) en $L^2(\mathbb{R})$.

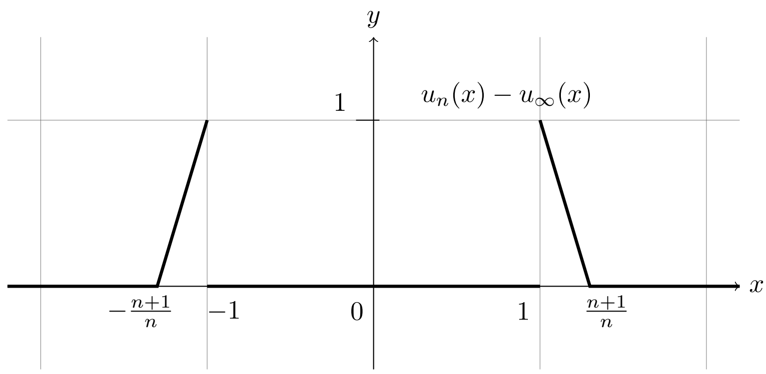
Maintenant, on va prouver que la limite est la fonction u_∞ définie par $u_\infty(t) = 1$ pour $t \in [-1, 1]$, $u_\infty(t) = 0$ ailleurs, c'est-à-dire:



Pour prouver ça, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on va calculer:

$$d_{L^2(\mathbb{R})}(u_n, u_\infty) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |u_n(x) - u_\infty(x)|^2 \,\mathrm{dx}}.$$

Le graphe de $u_n(x) - u_\infty(x)$ est celui-ci:



En particulier:

- $u_n(x) - u_\infty(x) = 0$ pour tout $x \leq -(n+1)/n$, $-1 \leq x \leq 1$ et $x \geq (n+1)/n$;
- $|u_n(x) - u_\infty(x)| \leq 1$ pour tout $-(n+1)/m < x < -1$ et $1 < x < (n+1)/n$.

Donc

$$d_{L^2(\mathbb{R})}(u_n, u_\infty) \leq \sqrt{\int_{-(n+1)/n}^{-1} \mathrm{dx} + \int_1^{(n+1)/n} \mathrm{dx}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a:

$$0 \leq d_{L^2(\mathbb{R})}(u_n, u_\infty) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Donc en utilisant le théorème des deux gendarmes, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} d_{L^2(\mathbb{R})}(u_n, u_\infty) = 0.$$

Autrement dit, la suite $\{u_n\}_n$ converge vers la limite u_∞, qui n'est pas en E parce qu'elle n'est pas continue.

Exercice 9.6(1) *Soit E un espace de Hilbert. On note B la boule de centre 0 et rayon 1 dans E. Montrer que B est un convexe fermé de E.*

On prend deux point e_1, e_2 quelconques en B, et $\lambda \in [0,1]$. Alors on a:

$$||\lambda e_1 + (1-\lambda)e_2|| \leq ||\lambda e_1|| + ||(1-\lambda)e_2|| =$$
$$= |\lambda| \cdot ||e_1|| + |1-\lambda| \cdot ||e_2|| = \lambda \cdot ||e_1|| + (1-\lambda) \cdot ||e_2||.$$

Vu que e_1 et e_2 sont en B, alors $||e_1|| \leq 1$ et $||e_2|| \leq 1$, donc

$$\lambda \cdot ||e_1|| + (1-\lambda) \cdot ||e_2|| \leq \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Donc le point $\lambda e_1 + (1-\lambda)e_2$ est en B, donc B est convexe. Maintenant il faut prouver que B est fermé. Donc on prend une suite de Cauchy $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en B. Vu que $\{e_n\}_n$ est de Cauchy en B, alors il est de Cauchy en E, qui est un espace de Hilbert. Donc il existe une limite e_∞ pour $\{e_n\}_n$. Maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a:

$$||e_n|| \leq 1.$$

Donc aussi $||e_\infty|| \leq 1$, donc $e_\infty \in B$, donc B est fermé.

Exercice 9.6(2) *Si $x \in E$, déterminer le projeté orthogonal de x sur la boule B.*

On note $P_B(x)$ le projeté orthogonal de x sur B. Par définition pour tout $x \in E$, $P_B(x)$ est le *seul* point de B tel que

$$d_E(x, P_B(x)) = \min\nolimits_{y\in B} d(x,y). \tag{0.1}$$

On va montrer que

$$P_B(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in B \\ \frac{x}{||x||} & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

(A) Si $x \in B$, alors $d(x,x) = 0$ et $x \in B$, donc à cause de (0.1) on a $P_B(x) = x$.

(B) Si $x \notin B$, alors $||x|| > 1$. Pour tout $y \in B$, on a:

$$||x|| = d(x,0) \leq d(x,y) + d(y,0) \leq d(x,y) + 1 \quad \Longrightarrow d(x,y) \geq ||x|| - 1 \quad \forall\, y \in B.$$

Donc on a:

$$\min_{y\in B} d(x,y) \geq ||x|| - 1. \tag{0.2}$$

Au même temps, on a:

$$d\left(x, \frac{x}{||x||}\right) = \left|\left|x - \frac{x}{||x||}\right|\right| = \left|\left|\frac{(||x||-1)x}{||x||}\right|\right| = \frac{||x||-1}{||x||} \cdot ||x|| = ||x|| - 1.$$

Vu que $x/||x||$ est en B (il a norme 1), alors

$$\min_{y \in B} d(x, y) \leq d\left(x, \frac{x}{||x||}\right) = ||x|| - 1. \tag{0.3}$$

Si on met ensemble (0.2) et (0.3), on a:

$$\min_{y \in B} d(x, y) = ||x|| - 1.$$

Donc le point $x/||x||$ est en B et il satisfait:

$$d\left(x, \frac{x}{||x||}\right) = \min_{y \in B} d(x, y).$$

Alors en appliquant (0.1) on a $x/||x|| = P_B(x)$.

Exercice 9.6(3) *Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de E et soit $p \in \mathbb{N}$. Soit F_p le sous-espace de E engendré par $e_0, \cdots, e_p$. Montrer que c'est un convexe fermé de E.*

F_p est convexe parce qu'il est un sous-espace vectoriel. On doit montrer qu'il est fermé, donc on prend un suite de Cauchy $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque en F_p. En particulier, $\{f_n\}_n$ est de Cauchy en E, donc elle a une limite en E; il faut prouver que la limite est dans F_p.

Vu que chaque f_n est un point de F_p, alors on peut écrire

$$f_n = \sum_{i=0}^{p} f_n^i \cdot e_i, \qquad f_n^1, \cdots, f_n^p \in \mathbb{C}.$$

Vu que $\{f_n\}_n$ est de Cauchy, alors chaque suite $\{f_n^i\}_n$ (pour $i = 0, \cdots, p$) est de Cauchy en $\mathbb{C}$ (la démonstration est presque la même de la première partie de l'Exercice 9.3(3)). Donc pour chaque $i = 0, \cdots, p$, il existe une limite f_∞^i pour la suite $\{f_n^i\}_n$. On note f_∞ le point

$$f_\infty := \sum_{i=0}^{p} f_\infty^i \cdot e_i \in F_p.$$

Vu que $\{e_0, \cdots, e_p\}$ est une famille orthogonale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a:

$$d_E(f_n, f_\infty) = ||f_n - f_\infty|| = \left|\left|\sum_{i=0}^{p} (f_n^i - f_\infty^i) \cdot e_i\right|\right| = \sqrt{\sum_{i=0}^{p} |f_n^i - f_\infty^i|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=0}^{p} d_{\mathbb{C}}^2(f_n^i, f_\infty^i)}$$

La dernière somme est une somme *finie*, dont tous le termes vont à zéro pour $n \to +\infty$. Donc on a:

$$\lim_{n \to +\infty} d_E(f_n, f_\infty) = 0.$$

Autrement dit, la limite de la suite $\{f_n\}_n$ est $f_\infty \in F_p$, donc F_p est un sous-espace fermé de E.

Exercice 9.6(4) *Quel est le projeté orthogonal sur F_p d'un vecteur x de E?*

On note $P(x)$ le projeté orthogonal sur F_p de x. Pour déterminer ce point, on doit calculer la distance $d(x,y)$ pour tout point $y \in F_p$. Par définition de F_p, pour tout $y \in F_p$ on peut écrire

$$y = \sum_{i=0}^{p} y_i \cdot e_i, \qquad y_0, \cdots, y_p \in \mathbb{C},$$

donc

$$d^2(x,y) = ||x-y|| =< x-y, x-y >=< x - \sum_{i=0}^{p} y_i \cdot e_i, x - \sum_{j=0}^{p} y_j \cdot e_j >=$$

$$=< x, x > - \sum_{i=0}^{p} < y_i \cdot e_i, x > - \sum_{j=0}^{p} < x, y_j \cdot e_j > + < \sum_{i=0}^{p} y_i e_i, \sum_{j=0}^{p} y_i e_j >=$$

$$=< x, x > - \sum_{i=0}^{p} y_i < e_i, x > - \sum_{i=0}^{p} \overline{y}_i < x, e_i > + \sum_{i=0}^{p} y_i \overline{y_j} < e_i, e_j > .$$

Vu que $\{e_0, \cdots, e_p\}$ est une famille orthonormée, alors on a $< e_i, e_j >= \delta_i^j$. Donc

$$d^2(x,y) = ||x||^2 - \left(\sum_{i=0}^{p} y_i < e_i, x > + \overline{y}_i \overline{< e_i, x >} \right) + \sum_{i=0}^{p} y_i \overline{y_i}.$$

Pour simplicité, supposons que E est un espace de Hilbert réel (Exercice: faire le cas complexe). Alors on a:

$$d^2(x,y) = ||x||^2 - \sum_{i=0}^{p} 2y_i < e_i, x > + \sum_{i=0}^{p} (y_i)^2 =$$

$$= ||x||^2 - \sum_{i=0}^{p} (< e_i, x >)^2 + \sum_{i=0}^{p} (< e_i, x >)^2 - \sum_{i=0}^{p} 2y_i < e_i, x > + \sum_{i=0}^{p} (y_i)^2 =$$

$$= ||x||^2 - \sum_{i=0}^{p} (< e_i, x >)^2 + \sum_{i=0}^{p} (< e_i, x > - y_i)^2 \geq$$

$$\geq ||x||^2 - \sum_{i=0}^{p} | < e_i, x > |^2 = \sum_{i=p+1}^{\infty} | < e_i, x > |^2.$$

(le dernier passage est une conséquence de l'identité de Parseval et du fait que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de E). Donc

$$d(x,y) \geq \sqrt{\sum_{i=p+1}^{\infty} | < e_i, x > |^2} \qquad \forall\, y \in F_p.$$

En particulier, cela implique que

$$\min_{y \in F_p} d(x,y) \geq \sqrt{\sum_{i=p+1}^{\infty} | < e_i, x > |^2}. \tag{0.4}$$

En plus, si on note

$$z := \sum_{i=0}^{p} < e_i, x > e_i \in F_p$$

alors on a:

$$d(x, z) = ||x - z|| = \left|\left| \sum_{i=p+1}^{\infty} < e_i, x > e_i \right|\right| = \sqrt{\sum_{i=p+1}^{\infty} | < e_i, x > |^2} \tag{0.5}$$

(de nouveau, le dernier passage est une conséquence de l'identité de Parseval et du fait que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de E). Vu que z est dans F_p, alors (0.5) implique que

$$\min_{y\in F_p} d(x, y) \leq \sqrt{\sum_{i=p+1}^{\infty} | < e_i, x > |^2}. \tag{0.6}$$

Si on met ensemble (0.4) et (0.6), on obtient que

$$\min_{y\in F_p} d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=p+1}^{\infty} | < e_i, x > |^2}.$$

Vu que $z \in F_p$ et qu'on a (0.5), alors on a $P(x) = z$.

Exercice 9.7 *Soit $u : E \to \mathbb{C}$ une forme linéaire sur un espace de Hilbert E. Montrer que u est continue si et seulement si son noyau est fermé dans E.*

(1) On suppose que u est continue et on veut montrer que le noyau $\ker(u)$ est fermé dans E. Alors on fixe une suite de Cauchy $\{x_n\}_n \subset \ker(u)$. Vu que E est un espace de Hilbert, il existe une limite x_∞ de $\{x_n\}_n$ dans E. Vu que u est continue, on a:

$$u(x_\infty) = u\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = \lim_{n\to+\infty} u(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0,$$

donc x_∞ est dans $\ker(u)$, donc $\ker(u)$ est fermé.

(2) Pour l'implication inverse, on considère 2 cas:

(2a) Si u est la fonction zéro, alors elle est clairement continue.

(2b) Si $u \neq 0$, alors $\ker(u)^\perp \neq \{0\}$, et on peut écrire:

$$E = \ker(u) \oplus \ker(u)^\perp \tag{0.7}$$

(si $\ker(u)$ n'est pas fermé, on ne peut pas écrire ça). Vu que $\ker(u)^\perp \neq \{0\}$, alors $\dim_{\mathbb{C}} \ker(u)^\perp \geq 1$. On fixe e quelconque en $\ker(u)^\perp \smallsetminus \{0\}$. Si $u(e) = 0$, alors $e \in \ker(u)$, mais cela est impossible à cause de (0.7). Donc $u(e) \neq 0$. Donc on peut montrer que $u(\ker(u)^\perp) = \mathbb{C}$. Vue que u ne s'annule pas sur $\ker(u)^\perp \smallsetminus \{0\}$, alors on peut montrer que

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(u)^\perp = 1.$$

Par exemple, on peut écrire

$$\ker(u)^\perp =< e >$$

(c'est-à-dire l'espace engendré par e, avec coefficients en $\mathbb{C}$). Donc on a:

$$E = < e > \oplus \ker(u). \tag{0.8}$$

Donc on fixe une suite de Cauchy quelconque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E; vu que E est un espace de Hilbert, il existe une limite x_∞ de $\{x_n\}_n$. Il faut prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} u(x_n) \stackrel{?}{=} u(x_\infty).$$

En appliquant (0.8), pour tout x_n on peut écrire (dans une forme unique):

$$x_n = \lambda_n \cdot e + y_n, \qquad \lambda_n \in \mathbb{C}, \quad y_n \in \ker(u).$$

En plus, on peut écrire

$$x_\infty = \lambda_\infty \cdot e + y_\infty, \qquad \lambda_\infty \in \mathbb{C}, \quad y_\infty \in \ker(u).$$

Vu que x_∞ est la limite de $\{x_n\}_n$, on a:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} d(x_\infty, x_n) = ||x_\infty - x_n|| = ||(\lambda_\infty - \lambda_n)\cdot e + (y_\infty - y_n)|| \stackrel{(*)}{=}$$
$$= \sqrt{||(\lambda_\infty - \lambda_n)e||^2 + ||y_\infty - y_n||^2}$$

où le passage $(*)$ est une conséquence simple du fait que $(\lambda_\infty - \lambda_n)e$ et $y_\infty - y_n$ sont vecteurs orthogonaux (le premier est en $< e >= \ker(u)^\perp$, le deuxième est en $\ker(u)$, voir identité de Pythagore, § 4.1, Chapitre 3). En particulier, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} ||(\lambda_\infty - \lambda_n)e|| = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda_\infty - \lambda_n| \cdot ||e|| = 0.$$

Vu que $e \neq 0$, alors $||e|| \neq 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda_\infty - \lambda_n| = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda_\infty.$$

Donc on a:

$$\lim_{n\to+\infty} u(x_n) = \lim_{n\to+\infty} u(\lambda_n e + y_n) = \lim_{n\to+\infty} u(\lambda_n e) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n u(e) =$$
$$= \lambda_\infty u(e) = u(\lambda_\infty e) = u(\lambda_\infty e + y_\infty) = u(x_\infty).$$

Donc on a prouvé que u est continue (dans l'hypothèse que son noyau est fermé).

Remarque: vu que u est linéaire, en haut il suffisait de montrer que u était continue en zéro.

Exercice 9.8 *Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, et soit E^* l'espace des formes linéaires continues sur E. On note $\phi : E \to E^*$ l'application qui à $u \in E$ associe la forme linéaire $v \mapsto < v, u >$. Est-ce que ϕ est $\mathbb{R}$-linéaire? Est-elle linéaire sur $\mathbb{C}$, ou bien semilinéaire? Est-elle injective? Surjective?*

Pour tout $u \in E$, on note $\phi(u)$ l'application linéaire

$$\phi(u) : E \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \phi(u)(v) :=< v, u > .$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:

$$\phi(\lambda u)(v) =< v, \lambda u >= \lambda < v, u >= \lambda\phi(u)(v) \qquad \forall v \in E.$$

Donc

$$\phi(\lambda u) = \lambda\phi(u),$$

donc $\phi(-)$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire. ϕ n'est pas $\mathbb{C}$ linéaire parce que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\phi(\lambda u) =< -, \lambda u >= \overline{\lambda} < -, u >= \overline{\lambda}\phi(u).$$

ϕ est injective: si on prend u et u' tels que $\phi(u) = \phi(u')$, alors

$$< v, u - u' >=< v, u > - < v, u' >= \phi(u)(v) - \phi(u')(v) = 0 \quad \forall\, v \in E.$$

Vu que $< -, - >$ est un produit scalaire, cela implique que $u - u' = 0$, donc $u = u'$.

Par définition, E^* est l'espace des formes linéaires *continues* sur E. Donc l'application ϕ est surjective grâce au théorème de Riesz.

Exercice 9.9 *Donner une base orthonormée de* $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

On rappelle que $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est l'espace de Hilbert de toutes suites

$$x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \subset \mathbb{C},$$

telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ est convergent. Le produit scalaire de x et y est

$$< x, y >= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

donc la norme de x est

$$||x|| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \geq 0}$ est donc donnée par

$$e_0 := (1, 0, 0, \cdots) \quad e_1 := (0, 1, 0, \cdots) \quad \cdots$$

Chaque e_i a norme égale à 1, et il est orthogonal à e_j pour tout $i \neq j$. En plus, chaque point $x = \{x_n\}_n \in l^2$ est la limite des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{i} x_i \cdot e_i,$$

donc l'espace F engendré par les combinaison linéaires finies des éléments de éléments de $\mathcal{B}$ est dense dans l'espace $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Donc on a prouvé que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Exercice 9.10(1) *On note* $L^2([0, 1])$ *l'ensemble des fonctions de* $L^2(\mathbb{R})$ *qui sont nulles en-dehors de l'intervalle* $[0, 1]$. *Montrer que* $L^2([0, 1])$, *muni de la restriction du produit scalaire de* $L^2(\mathbb{R})$, *est un espace de Hilbert.*

Si on prend $f, g \in L^2([0,1]) \subset L^2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors on a $\lambda f + \mu g \in L^2(\mathbb{R})$ parce $L^2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. En plus, $\lambda f + \mu g$ est nulle en dehors de l'intervalle $[0,1]$ parce que f et g sont nulles en dehors de cet intervalle. Donc $\lambda f + \mu g \in L^2([0,1])$, donc $L^2([0,1])$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$.

Maintenant on peut considérer le produit scalaire $< -,- >_{L^2([0,1])}$ (donc la norme, donc la distance) qui est induit par la restriction du produit scalaire $< -,- >_{L^2(\mathbb{R})}$. Vu que $< -,- >_{L^2(\mathbb{R})}$ est un produit scalaire, alors on peut montrer que aussi $< -,- >_{L^2([0,1])}$ est un produit scalaire. La seule chose qu'il faut encore vérifier est que $L^2([0,1])$ (avec la distance induite par $< -,- >_{L^2([0,1])}$) est complet.

Autrement dit, il faut montrer que chaque suite de Cauchy est convergente en $L^2([0,1])$. Donc on considère une suite de Cauchy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^2([0,1])$. Par définition de suite de Cauchy, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tel que

$$d_{L^2([0,1])}(f_n, f_m) < \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq k(\varepsilon).$$

Donc on a

$$d_{L^2(\mathbb{R})}(f_n, f_m) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \,\mathrm{dx}} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 \,\mathrm{dx}} = d_{L^2([0,1])}(f_n, f_m) < \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq k(\varepsilon).$$

Donc la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$, qui est complet (par définition d'espace de Hilbert). Donc il existe une limite f_∞ pour $\{f_n\}_n$, donc:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} d_{L^2(\mathbb{R})}(f_\infty, f_n) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f_\infty(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{dt}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\int_{-\infty}^{0} |f_\infty(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^1 |f_\infty(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{dt} + \int_1^{\infty} |f_\infty(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{dt}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\int_{-\infty}^{0} |f_\infty(t)|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^1 |f_\infty(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{dt} + \int_1^{\infty} |f_\infty(t)|^2 \,\mathrm{dt}}.$$

Donc on a:

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{0} |f_\infty(t)|^2 \,\mathrm{dt} = 0, \\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_\infty(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{dt} = 0, \\ \int_1^{\infty} |f_\infty(t)|^2 \,\mathrm{dt} = 0. \end{gathered} \tag{0.9}$$

Si on pose

$$g_\infty(t) := \begin{cases} f_\infty(t) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_\infty(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \int_0^1 |g_\infty(t)|^2 \, \mathrm{dt} = \int_0^1 |f_\infty(t)|^2 \, \mathrm{dt} \leq \int_{\infty}^{\infty} |f_\infty(t)|^2 \, \mathrm{dt} < \infty$$

(parce que $f_\infty \in L^2(\mathbb{R})$), donc aussi g_∞ est en $L^2(\mathbb{R})$; en plus, g_∞ est nulle en-dehors de l'intervalle $[0,1]$, donc $g_\infty \in L^2([0,1])$. En plus, (0.9) implique que

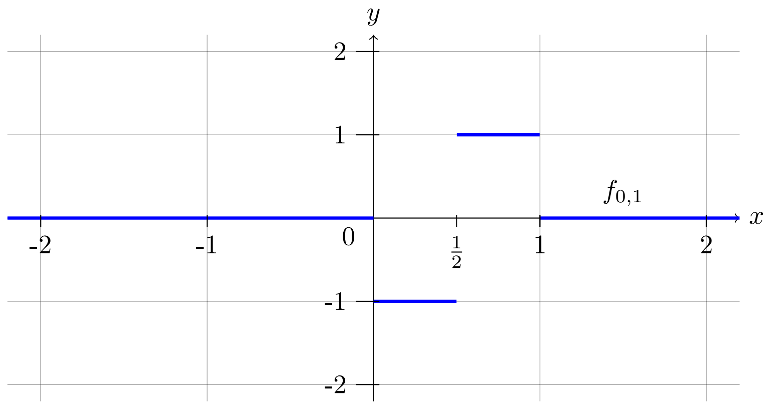
$$\lim_{n\to+\infty} d_{L^2([0,1])}(f_n, g_\infty) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\int_0^1 |g_\infty(t) - f_n(t)|^2 \, \mathrm{dt}} = 0.$$

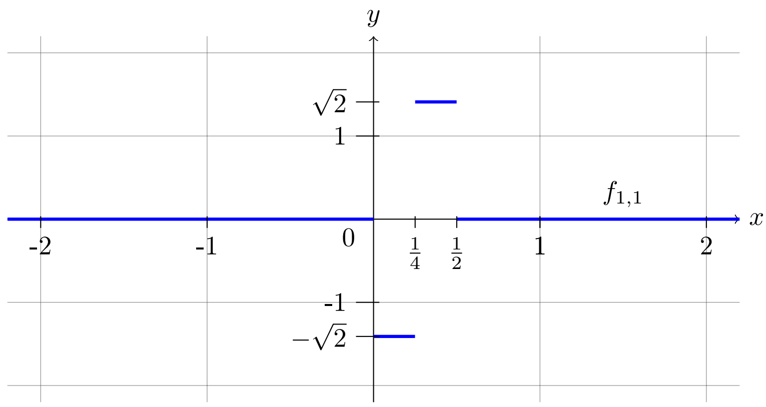
Donc g_∞ est la limite de la suite $\{f_n\}_n$ en $L^2([0,1])$. Donc $L^2([0,1])$ est complet, donc il est un espace de Hilbert.

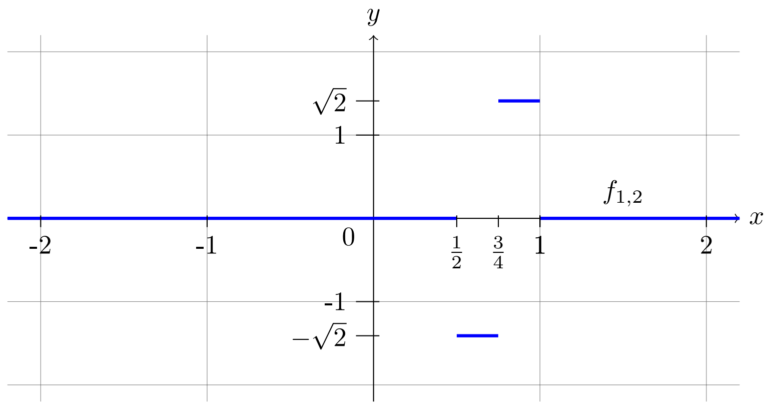
Exercice 9.10(2) *On appelle f_0 la fonction qui vaut 1 sur $[0,1]$ et 0 ailleurs, et on considère une famille de fonctions $f_{n,k}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq 2^n$ comme suit:*

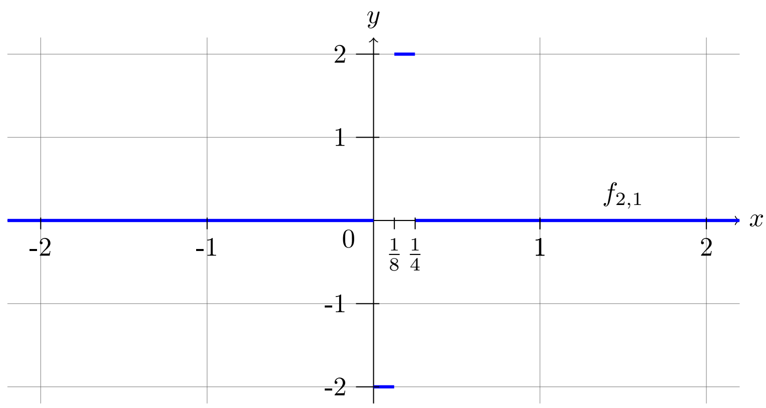
- $f_{n,k} = -2^{n/2}$ sur $[(k-1)/2^n, (k-1/2)/2^n]$;
- $f_{n,k} = 2^{n/2}$ sur $](k-1/2)/2^n, k/2^n[$;
- $f_{n,k} = 0$ ailleurs.

Tracer un graphe de $f_{0,1}, f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}$.









Exercice 9.10(3) *Montrer que la famille* $\{f_{n,k}\}$ *est une famille orthonormée de* $L^2([0,1])$.

Avant tout, il faut vérifier que chaque $f_{n,k}$ est unitaire. On a

$$|f_{n,k}(x)|^2 = \begin{cases} 2^n & \text{si } x \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Donc

$$||f_{n,k}||_{L^2([0,1])} = \sqrt{\int_0^1 |f_{n,k}(x)|^2 \, \mathrm{dx}} = \sqrt{2^n \cdot \left(\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}\right)} = \sqrt{\frac{2^n}{2^n}} = 1.$$

Maintenant il faut prouver que $f_{n,k}$ est orthogonal à $f_{n',k'}$ si $(n,k) \neq (n',k')$. On considère deux cas:

(A) Si $n = n'$ et $k \neq k'$, alors $f_{n,k}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{supp}(f_{n,k'})$ (le lieu où $f_{n,k'}(x) \neq 0$). Donc

$$< f_{n,k}, f_{n,k'} >= \int_0^1 f_{n,k}(x)\overline{f_{n,k'}(x)} \, \mathrm{dx} = 0.$$

(B) Si $n \neq n'$, on peut supposer $n < n'$. Donc $f_{n',k'}$ n'est pas nulle seulement sur un intervalle I où $f_{n,k}$ a valeur constante. Sur la première moitié I_1 de I $f_{n',k'}$ a valeur $-2^{n'/2}$, tandis que sur la deuxième moitié I_2 de I $f_{n',k'}$ a valeur $2^{n'/2}$. Donc l'intégrale

$$\int_0^1 f_{n,k}(x)\overline{f_{n',k'}(x)}\,\mathrm{dx}$$

est zéro aussi dans ce cas. Donc la famille $\{f_{n,k}\}$ est une famille orthonormée. En effet, elle une base de $L^2([0,1])$ (mais on ne va pas prouver ça). Elle s'appelle base de Haar.

Exercice 9.11(1) *On se place sur l'intervalle* $[-1,1]$*, et on note* $E = L^2([-1,1])$ *muni de la restriction du produit scalaire de* $L^2(\mathbb{R})$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on note*

$$P_n(x) := \frac{\partial^n}{\partial^n x}(x^2-1)^n.$$

Montrer que P_n *est orthogonal à tout polynôme de degré au plus* $n-1$*.*

Si $f(x)$ est une fonction lisse quelconque, on a:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)(x^2-1)^n\right) =$$
$$= f'(x)(x^2-1)^n + 2nxf(x)(x^2-1)^{n-1} = [f'(x)(x^2-1) + 2nxf(x)](x^2-1)^{n-1}.$$

Maintenant la fonction $f'(x)(x^2-1)^n + 2nxf(x)$ est une fonction lisse, on l'appelle $g_1(x)$. Donc on a prouvé que:

$$\forall\, f \in C^\infty, \exists\, g_1 \in C^\infty \quad \text{t. q.} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)(x^2-1)^n\right) = g_1(x)(x^2-1)^{n-1}.$$

Donc on a:

$$\forall\, f \in C^\infty, \exists\, g_2 \in C^\infty \quad \text{t. q.} \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\left(f(x)(x^2-1)^n\right) = g_2(x)(x^2-1)^{n-2}.$$

Par induction, pour tout $k = 1, 2, \cdots, n-1$ on a:

$$\forall\, f \in C^\infty, \exists\, g_k \in C^\infty \quad \text{t. q.} \quad \frac{\partial^k}{\partial^k x}\left(f(x)(x^2-1)^n\right) = g_k(x)(x^2-1)^{n-k}.$$

En particulier, si on prend $f(x) := 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ et $k := n-1$, on a:

$$\exists\, g_{n-1} \in C^\infty \text{ t. q. } \frac{\partial^{n-1}}{\partial^{n-1} x}(x^2-1)^n = g_{n-1}(x)(x^2-1)^{n-(n-1)} = g_{n-1}(x)(x^2-1).$$

Donc pour tout fonctions q lisses et pout tout $n \geq 1$, si on prend une intégration par parties on a:

$$\int_{-1}^1 q(x)\frac{\partial^n}{\partial^n x}(x^2-1)^n\,\mathrm{dx} =$$
$$= \left[q(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial^{n-1} x}(x^2-1)^n\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 q'(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial^{n-1} x}(x^2-1)^n\,\mathrm{dx} =$$
$$= \Big[q(x)g_{n-1}(x)(x^2-1)\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 q'(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial^{n-1} x}(x^2-1)^n\,\mathrm{dx} =$$
$$= -\int_{-1}^1 q'(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial^{n-1} x}(x^2-1)^n\,\mathrm{dx}.$$

Donc par induction, pour tout $k = 1, \cdots, n$ on a:

$$\int_{-1}^{1} q(x) \frac{\partial^n}{\partial^n x}(x^2-1)^n \,\mathrm{dx} = (-1)^k \int_{-1}^{1} q^{(k)}(x) \frac{\partial^{n-k}}{\partial^{n-k} x}(x^2-1)^n \,\mathrm{dx}$$

où $q^{(k)}$ est la dérivée de q k fois. En particulier, si on prend $k = n$, on a:

$$\begin{aligned} < q, P_n >_{L^2([-1,1])} &= \int_{-1}^{1} q(x) \frac{\partial^n}{\partial^n x}(x^2-1)^n \,\mathrm{dx} = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} q^{(n)}(x) \frac{\partial^0}{\partial^0 x}(x^2-1)^n \,\mathrm{dx} = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} q^{(n)}(x)(x^2-1)^n \,\mathrm{dx}. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Cette description est vraie pour chaque fonction lisse q. En particulier, si $q(x)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$, alors $q^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$\int_{-1}^{1} q(x) \frac{\partial^n}{\partial^n x}(x^2-1)^n \,\mathrm{dx} = 0.$$

Donc

$$< q, P_n >_{L^2([-1,1])} = 0$$

pour tout polynôme q de degré au plus $n-1$.

Exercice 9.11(2) *Montrer qu'il existe des constantes c_n, $n \in \mathbb{N}$, tels que la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt au système $\{1, x, x^2, \cdots\}$ est $\{c_n P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra si nécessaire admettre que*

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \,\mathrm{dx} = 2^{2n}(n!)^2 \cdot \frac{2}{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisi

$$c_n := \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n n! \sqrt{2}}$$

et on note:

$$R_n(x) := c_n P_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1} P_n(x)}{2^n n! \sqrt{2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Donc on a:

$$\begin{aligned} ||R_n||_{L^2([-1,1])} &= \sqrt{\int_{-1}^{1} |R_n(x)|^2 \,\mathrm{dx}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2^{2n+1}(n!)^2} \int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2 \,\mathrm{dx}} = \\ &= \sqrt{\frac{2n+1}{2^{2n+1}(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}} = 1. \end{aligned} \tag{0.11}$$

Donc chaque R_n est unitaire en $L^2([-1,1])$.

On rappelle (voir Théorème 8.3, Chapitre 3) que si on fixe une famille linéairement indépendante $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}}$ qui engendre $L^2([-1,1])$, alors la base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}}$ obtenue avec Gram-Schmidt est la seule famille telle que:

(a) $< e_i, e_j >= \delta_i^j$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0}$
(b) $< e_0, \cdots, e_n >=< f_0, \cdots, f_n >$ pour tout $n \geq 0$;

(c) $< f_n, e_n >\in \mathbb{R}_{>0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

Donc si on vérifie que $\{R_n\}_n$ a les même propriétés de $\{e_n\}_n$ pour $\{f_n\}_n := \{x^n\}_n$, alors on a automatiquement que $R_n = f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On commence avec la condition (a): par définition chaque P_i est la dérivée i fois d'un polynôme de degré $2i$. Donc P_i est encore un polynôme, de degré $2i - i = i$. Donc aussi R_i est un polynôme de degré i. Donc:

- si $i = j$, alors on a $< R_i, R_i >= ||R_i||^2 = 1^2 = 1$ (voir (0.11)):
- si $i < j$, alors R_i est un polynôme de degré i et R_j est orthogonal à R_i grâce à l'Exercice 9.11(1), donc $< R_i, R_j >= 0$;
- si $i > j$, alors R_j est un polynôme de degré j et R_i est orthogonal à R_j grâce à l'Exercice 9.11(1), donc $< R_i, R_j >= 0$.

Donc la condition (a) est satisfaite.

En plus, vu que chaque R_i est un polynôme de degré i, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ l'espace engendré par $R_0, \cdots, R_n$ coïncide avec l'espace engendré par $1, x, \cdots, x^n$, donc aussi la condition (b) est satisfaite.

Maintenant, on considère la condition (c). D'abord, on cherche de calculer

$$< x^n, P_n >_{L^2([-1,1])} .$$

Pour cela, il suffit d'appliquer (0.10) avec $q(x) := x^n$. Donc on a:

$$\begin{aligned}< x^n, P_n >_{L^2([-1,1])} &= (-1)^n \int_{-1}^{1} q^{(n)}(x)(x^2-1)^n \,\mathrm{dx} = \\ &= (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \,\mathrm{dx}\,.\end{aligned}$$

Maintenant il faut distinguer 2 cas:

(A) si n est pair, alors $(-1)^n = 1$ et $(x^2-1)^n > 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$, donc

$$< x^n, P_n >_{L^2([-1,1])} = n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \,\mathrm{dx} > 0.$$

(B) si n est impair, alors $(-1)^n = -1$; en plus pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $x^2 < 1$, donc $(x^2-1)^n < 0$, donc:

$$< x^n, P_n >_{L^2([-1,1])} = -n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \,\mathrm{dx} > 0.$$

Donc dans tous les deux cas, $< x^n, P_n >$ est positif. Vu que c_n est positif et réel, alors on a

$$< x^n, R_n >_{L^2([-1,1])} = \overline{c_n} < x^n, P_n >_{L^2([-1,1])} = c_n < x^n, P_n >_{L^2([-1,1])} > 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, donc aussi la condition (c) est satisfaite.

Mathematics Research Unit
University of Luxembourg
6, rue Richard Coudenhove-Kalergi
L-1359 Luxembourg

website: http://matteotommasini.altervista.org/

email: matteo.tommasini2@gmail.com