ANALYSE 3B - TRAVAUX DIRIGÉS
CHAPITRE 2 - INTÉGRALES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

MATTEO TOMMASINI

Si vous trouvez des erreurs de français (très probable) ou de mathématiques (moins improbable, mais pas impossible), dite-le-moi, merci!

Exercice 7.1(1) *Calculer en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$ l'intégrale entre a e b de la fonction*

$$f(x) = xe^{x^2}$$

et préciser quelle conditions il faut mettre sur a, b pour que l'intégrale ait un sens.

La fonction $f(x)$ est bien définie pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. On a:

$$\int_a^b xe^{x^2} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2} \int_a^b 2xe^{x^2} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_a^b = \frac{e^{b^2} - e^{a^2}}{2}.$$

Exercice 7.1(2) *Calculer en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$ l'intégrale entre a e b de la fonction*

$$f_c(x) = \sinh(cx)$$

et préciser quelle conditions il faut mettre sur a, b, c pour que l'intégrale ait un sens.

On rappelle que

$$\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Donc l'intégrale est bien définie pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $c = 0$, on a $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\int_a^b f_0(x) \,\mathrm{dx} = 0$. Si $c \neq 0$, on a:

$$\int_a^b f_c(x) \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2} \int_a^b e^{cx} - e^{-cx} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2c} \left[e^{cx} + e^{-cx} \right]_a^b =$$
$$= \frac{1}{2c} \left(e^{cb} + e^{-cb} - e^{ca} - e^{-ca} \right).$$

Exercice 7.1(3) *Calculer en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$ l'intégrale entre a e b de la fonction*

$$f_c(x) = c^x$$

et préciser quelle conditions il faut mettre sur a, b, c pour que l'intégrale ait un sens.

Date: December 5, 2014.

La fonction c^x est bien définie seulement pour $c \geq 0$ (et pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc a, b peuvent varier librement en $\mathbb{R}$). Pour $c = 0$, on a $\int_a^b f_c(x)\,\mathrm{dx} = 0$. Si $c = 1$, on a $\int_a^b f_c(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \mathrm{dx} = b - a$. Si $c \in \mathbb{R}_{>0} \smallsetminus \{1\}$, on a

$$\int_a^b f_c(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b e^{\log(c)x}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \left[\frac{e^{\log(c)x}}{\log(c)}\right]_a^b = \frac{e^{b\log(c)} - e^{a\log(c)}}{\log(c)} = \frac{c^b - c^a}{\log(c)}.$$

Exercice 7.1(5) *Calculer en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$ l'intégrale entre a e b de la fonction*

$$f_c(x) = \frac{1}{1 + (cx)^2}$$

et préciser quelle conditions il faut mettre sur a, b, c pour que l'intégrale ait un sens.

La fonction et l'intégrale a priori sont bien définies pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $c = 0$, on a $\int_a^b f_0(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \mathrm{dx} = b - a$. Si $c \neq 0$, on considère le changement de variable $x = y/c$, donc $\mathrm{dx} = \mathrm{dy}/c$ et on a:

$$\int_a^b \frac{1}{1 + (cx)^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \frac{1}{1 + y^2}\,\mathrm{dy}.$$

On rappelle que si f est une fonction lisse inversible, avec inverse lisse g, alors on a:

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))}.$$

En plus, on rappelle que

$$\frac{\partial}{\partial x}\tan(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Donc si on note $\arctan(-)$ la fonction inverse de $\tan(-)$, alors on a:

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Vu que arctan est bien définie sur toute la droite réelle, on a:

$$\frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \frac{1}{1 + y^2}\,\mathrm{dy} = \frac{1}{c}\Big[\arctan(y)\Big]_{ca}^{cb} = \frac{\arctan(cb) - \arctan(ca)}{c}.$$

Exercice 7.1(6) *Calculer en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$ l'intégrale entre a e b de la fonction*

$$f_c(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (cx)^2}}$$

et préciser quelle conditions il faut mettre sur a, b, c pour que l'intégrale ait un sens.

a, b peuvent varier librement en $\mathbb{R}$. Si $c = 0$, alors $\int_a^b f_0(x)\,\mathrm{dx} = b - a$. Si $c \neq 0$, alors on considère le changement de variables $x = y/c$, donc on a $\mathrm{dx} = \mathrm{dy}/c$ et

$$\int_a^b f_c(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}\,\mathrm{dy}.$$

Maintenant, une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ est $F(y) := \log(y + \sqrt{1+y^2})$ parce que:

$$F'(y) = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{y+\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

La fonction F est bien définie parce que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a:

$$y + \sqrt{1+y^2} > y + \sqrt{y^2} = y + |y| \geq 0.$$

Donc on a:

$$\frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{dy} = \frac{1}{c}\Big[\log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\Big]_{ca}^{cb} = \frac{1}{c}\log\left(\frac{cb+\sqrt{1+c^2b^2}}{ca+\sqrt{1+c^2a^2}}\right).$$

Exercice 7.1(7) *Calculer en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$ l'intégrale entre a e b de la fonction*

$$f_c(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(cx)^2}}$$

et préciser quelle conditions il faut mettre sur a, b, c pour que l'intégrale ait un sens.

Pour chaque $c \in \mathbb{R}$, f_c est bien définie pour $x \in]-1/c, 1/c[$, donc il faut

$$-\frac{1}{c} < a \leq b < \frac{1}{c}.$$

On considère le changement de variables $x = y/c$, donc $\mathrm{dx} = \mathrm{dy}/c$ et on a:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-(cx)^2}} = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{c}\Big[\arcsin(y)\Big]_{ca}^{cb} = \frac{\arcsin(cb) - \arcsin(ca)}{c}$$

si $-1 < ca < cb < 1$ (ici $\arcsin(-)$ est la fonction inverse de $\sin(-)$, définie sur le domaine $[-1, 1]$).

Exercice 7.2(1) *Déterminer les primitives de la fonction*

$$f_n(t) := t^n \log(t) \quad \text{pour}\, n \geq 1.$$

On prend une intégration par parties et on ignore toutes les constantes additives. Donc on a:

$$\int t^n \log(t)\,\mathrm{dt} = \frac{t^{n+1}}{n+1}\log(t) - \int \frac{t^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \frac{t^{n+1}}{n+1}\log(t) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\left((n+1)\log(t) - 1\right).$$

Donc les primitives de $f_n(t)$ sont toutes de la forme:

$$\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\log\left(\frac{t^{n+1}}{e}\right) + \mu, \qquad \forall\,\mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.2(2) *Déterminer les primitives de la fonction*

$$g(t) := \arctan(t),$$

où $\arctan(-)$ *est la fonction inverse de* $\tan(-)$*, définie sur tout* $\mathbb{R}$.

On prend une intégration par parties. Donc on a:

$$\int \arctan(t)\,\mathrm{dt} = t\arctan(t) - \int t \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} =$$

$$= t\arctan(t) - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2} = t\arctan(t) - \frac{1}{2}\log(1+t^2) = t\arctan(t) - \log(\sqrt{1+t^2}).$$

Donc toutes le primitives de $\arctan(t)$ sont de la forme

$$t\arctan(t) - \log(\sqrt{1+t^2}) + \mu \qquad \forall\, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.3 *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Montrer que pour tout $n \geq 2$ *on a* $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Si $n \geq 2$, alors on on peut écrire:

$$\sin^n(t) = \sin^{n-2}(t)(1-(\cos^2(t)) = \sin^{n-2}(t) - \cos^2(t)\sin^{n-2}(t) =$$

$$= \sin^{n-2}(t) - \frac{\cos(t)}{n-1}\cdot\frac{\partial \sin^{n-1}(t)}{\partial t}.$$

Donc si on prend une intégration par parties on a:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\,\mathrm{dt} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{n-1}\cdot\frac{\partial \sin^{n-1}(t)}{\partial t}\,\mathrm{dt} =$$

$$= I_{n-2} - \left[\frac{\cos(t)}{n-1}\cdot\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{2\pi} \frac{-\sin(t)}{n-1}\cdot\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{dt} =$$

$$= I_{n-2} - 0 - \frac{1}{n-1}\int_0^{2\pi} \sin^n(t)\,\mathrm{dt} = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\cdot I_n.$$

Donc on a:

$$I_n + \frac{1}{n-1}\cdot I_n = I_{n-2} \quad \Longrightarrow \frac{n}{n-1}\cdot I_n = I_{n-2},$$

Donc on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 7.4 *Calculer en fonction de* t *les déterminantes des matrices* 2×2 *suivantes:*

$$A := \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \cosh(t) & 2\sinh(t) \\ \sinh(t) & 2\cosh(t) \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 2t+1 & (2t+1)^2 \\ 1 & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1,$$

$$\det(B) = 2(\cosh^2(t) - \sinh^2(t)) = 2\left(\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}\right) = 2\cdot 1 = 2.$$

$$\det(C) = (2t+1)(2t-1) - (2t+1)^2 = 4t^2 - 1 - 4t^2 - 4t - 1 = -4t - 2.$$

Exercice 7.5 *Calculer les déterminantes des matrices suivantes:*

$$D := \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix},$$
$$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(D) = 28 + 88 = 116,$$

$$\det(E) = \det\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} + 6\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 84 - 90 + 6(18-20) = -6 - 12 = -18.$$

$$\det(F) = \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 28 - 30 + 2(18-20) = -2 - 4 = -6.$$

$$\det(G) = \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 9 - 5 - (2 - 12) = 4 + 10 = 14.$$

Exercice 7.6(1) *Calculer l'aire du parallélogramme P construit sur les vecteurs*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$Aire(P) = \det\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = |8 - 3| = 5.$$

Exercice 7.6(2) *Calculer le volume du parallélépipède P construit sur les vecteurs*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$Vol(P) = \det\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right| = |1 - 3 + 6| = 4.$$

Exercice 7.6(3) *Montrer que le volume d'un parallélépipède P dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.*

On choisi un sommet Q_0 quelconque de P. Puis on nomme Q_1, Q_2 et Q_3 les 3 sommets de Q qui sont lié à Q_0 à travers un côté de P. Enfin, pour tout $i = 1, 2, 3$ on nomme v_i le vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui lie Q_i et Q_0, c'est-à-dire $v_i = Q_i - Q_0$. Alors chaque v_i a coordonnées entières. En plus, le volume de P est la valeur absolue du déterminant de la matrice 3×3 avec v_1, v_2 et v_3 sur les colonnes (de manière équivalente, sur les lignes), donc le volume de P est encore un nombre entier.

Exercice 7.7 *Calculer l'intégrale sur* $[0,1]\times[1,3]$ *de la fonction définie par* $f(x,y) = xy + y^2$.

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[1,3]} xy + y^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} &= \int_0^1 \left(\int_1^3 xy + y^2 \,\mathrm{dy}\right) \mathrm{dx} = \\
= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_1^3 \mathrm{dx} &= \int_0^1 \frac{9x}{2} + 27 - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \,\mathrm{dx} = \\
= \int_0^1 4x + \frac{80}{9} \,\mathrm{dx} &= \left[2x^2 + \frac{80x}{9}\right]_0^1 = 2 + \frac{80}{9} = \frac{98}{9}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.8(1) *Déterminer l'aire de la partie bornée D du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y = x^2$.*

On peut écrire:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq \sqrt{x}\right\},$$

donc on a

$$\begin{aligned}
Aire(D) = \int_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \mathrm{dy}\right) \mathrm{dx} = \\
= \int_0^1 \sqrt{x} - x \,\mathrm{dx} &= \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.8(2) *Calculer l'intégrale sur D (voir Exercice 7.8(1)) de la fonction définie par $f(x,y) = x + y$.*

$$\begin{aligned}
\int_D x + y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} x + y \,\mathrm{dy}\right) \mathrm{dx} = \\
= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=\sqrt{x}} \mathrm{dx} &= \int_0^1 x\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^2 - \frac{x^2}{2} \,\mathrm{dx} = \\
= \int_0^1 x^{3/2} + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{2} \,\mathrm{dx} &= \left[\frac{2x^{5/2}}{5} + x^2 - \frac{x^3}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{9}{10}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.9(1) *Calculer l'intégrale de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y$ sur le domaine D défini par*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0, \quad x + y \leq 1, \quad y - x \leq 1\right\}.$$

On peut écrire

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 1,\, y - 1 \leq x \leq 1 - y\right\},$$

donc on a:

$$\int_D x^2y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} x^2y \,\mathrm{dx}\right) \mathrm{dy} =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3y}{3}\right]_{x=y-1}^{x=1-y} \mathrm{dy} = \int_0^1 \frac{(1-y)^3y-(y-1)^3y}{3}\,\mathrm{dy} =$$

$$= \int_0^1 \frac{y(1-3y+3y^2-y^3-y^3+3y^2-3y+1)}{3}\,\mathrm{dy} = \frac{2}{3}\int_0^1 y-3y^2+3y^3-y^4\,\mathrm{dy} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{y^2}{2}-y^3+\frac{3y^4}{4}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{30}.$$

Exercice 7.9(2) *Calculer l'intégrale de la fonction f définie par $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)$ sur le domaine D défini par*

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, \quad y\geq 0, \quad x+y\leq\pi\right\}.$$

On peut écrire

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq \pi, \quad 0\leq y\leq \pi-x\right\},$$

donc on a:

$$\int_D \sin(x)\sin(y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^\pi \left(\int_0^{\pi-x}\sin(x)\sin(y)\right)\mathrm{dx} =$$

$$= \int_0^\pi \Big[-\sin(x)\cos(y)\Big]_{y=0}^{y=\pi-x}\mathrm{dx} = \int_0^\pi -\sin(x)\cos(\pi-x)+\sin(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)+\sin(x)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{\sin^2(x)}{2}-\cos(x)\right]_0^\pi = 0-(-1)-(0-1) = 1+1 = 2.$$

Exercice 7.10 *Calculer*

$$\int_{0\leq y\leq x\leq 1} \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

On a:

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq y\leq x\leq 1\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\, 0\leq y\leq x\right\},$$

donc on a:

$$\int_{0\leq y\leq x\leq 1} \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^1\left(\int_0^x \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2(1+x^2)}\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

Maintenant une primitive de $x^2/(1+x^2)$ est la fonction

$$F(x) = x-\arctan(x)$$

(où $\arctan(-)$ est la fonction inverse de $\tan(-)$) parce que

$$F'(x) = 1-\frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Donc on a:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\Big[x-\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}[1-\arctan(1)-\arctan(0)] =$$

$$= \frac{1}{2}[1-\pi/4-0] = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.$$

Exercice 7.11 *Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque réalisé dans un matériau homogène.*

Si on a un nombre fini n de particules $\{P_i = (X_i, Y_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ dans $\mathbb{R}^2$, de masse $m_1, \cdots, m_n$, la masse totale est $M = \sum_i m_i$ et le centre de gravité est $G = (X_G, Y_G)$, avec:

$$X_G := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i X_i \qquad \text{et} \qquad Y_G := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i.$$

Dans le cas d'un corps continu sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on note $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la distribution de masse du corps (densité), et on a:

$$M = \int_\Omega \rho(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}, \quad X_G = \frac{1}{M}\int_\Omega x\rho(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \quad \text{et} \quad Y_G = \frac{1}{M}\int_\Omega y\rho(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Un corps est dit homogène si la densité est constante, disons $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$.

On suppose que le centre du disque est le point (X_0, Y_0), on note $R > 0$ son rayon, et $D/2$ le demi-disque "supérieur, donc on a:

$$D/2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, X_0 - R \leq x \leq X_0 + R, \quad Y_0 \leq y \leq Y_0 + \sqrt{R^2 - (x - X_0)^2}\right\}.$$

Donc la masse est:

$$M = \int_{D/2} \rho(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \rho \int_{X_0-R}^{X_0+R} \left(\int_{Y_0}^{Y_0+\sqrt{R^2-(x-X_0)^2}} \mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} =$$
$$= \rho \int_{X_0-R}^{X_0+R} \sqrt{R^2 - (x - X_0)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

Maintenant on considère le changement de variables

$$\phi : [0,\pi]_t \longrightarrow [X_0 - R, X_0 + R]_x, \qquad \phi(t) := R\cos(t) + X_0.$$

On a $\mathrm{dx} = -R\sin(t)\,\mathrm{dt}$, donc

$$M = \rho \int_\pi^0 \sqrt{R^2 - R^2\cos^2(t)}(-R\sin(t))\,\mathrm{dt} = \rho \int_0^\pi R|\sin(t)|R\sin(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Vu que $t \in [0,\pi]$, on a $\sin(t) > 0$, donc on a:

$$M = \rho R^2 \int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{dt} = \rho R^2 \left[\frac{t - \sin(t)\cos(t)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\rho\pi R^2}{2}.$$

La coordonnée X_G est égale à X_0 pour des raisons de symétrie. Pour la coordonnée Y_G, on a:

$$Y_G = \frac{1}{M}\int_D y\rho\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \frac{2}{\rho\pi R^2}\rho \int_{X_0-R}^{X_0+R} \left(\int_{Y_0}^{Y_0+\sqrt{R^2-(x-X_0)^2}} y\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} =$$
$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_{X_0-R}^{X_0+R} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=Y_0}^{y=Y_0+\sqrt{R^2-(x-X_0)^2}} \mathrm{dx} =$$
$$= \frac{1}{\pi R^2}\int_{X_0-R}^{X_0+R} Y_0^2 + R^2 - (x - X_0)^2 + 2Y_0\sqrt{R^2 - (x - X_0)^2} - Y_0^2\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\int_{X_0-R}^{X_0+R} R^2-(x-X_0)^2+2Y_0\sqrt{R^2-(x-X_0)^2}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\int_{X_0-R}^{X_0+R} R^2\,\mathrm{dx} - \frac{1}{\pi R^2}\int_{X_0-R}^{X_0+R}(x-X_0)^2\,\mathrm{dx} + \frac{2Y_0}{\pi R^2}\int_{X_0-R}^{X_0+R}\sqrt{R^2-(x-X_0)^2}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{2R}{\pi} - \frac{1}{\pi R^2}\left[\frac{(x-X_0)^3}{3}\right]_{X_0-R}^{X_0+R} + \frac{2Y_0}{\pi R^2}\int_{X_0-R}^{X_0+R}\sqrt{R^2-(x-X_0)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

On a déjà calculé le dernier terme (pour calculer la masse M), donc on a

$$Y_G = \frac{2R}{\pi} - \frac{1}{\pi R^2}\left[\frac{R^3+R^3}{3}\right] + \frac{2Y_0}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^2}{2} =$$
$$= \frac{2R}{\pi} - \frac{2R}{3\pi} + Y_0 = \frac{4R}{3\pi} + Y_0.$$

Une autre méthode (un peu plus simple) pour calculer le centre de masse est celle de considérer coordonnées polaires (voir solution du devoir n.1).

Exercice 7.12 *Utiliser une intégrale double pour calculer l'aire de la sphère S de rayon R dans $\mathbb{R}^3$.*

On note

$$S_+ := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=R^2,\, z\geq 0\} =$$
$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2\leq R^2,\, z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$$

et

$$S_- := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=R^2,\, z< 0\} =$$
$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2< R^2,\, z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}.$$

On a $S = S_+\coprod S_-$, donc $Aire(S) = Aire(S_+) + Aire(S_-)$. On cherche une parametrisation pour la surface S_+. On note

$$D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leq R^2\}$$

et on choisi

$$\phi:\, D\longrightarrow S_+\subset\mathbb{R}^3,\qquad \phi(x,y) := (x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2}).$$

ϕ est une fonction lisse et inversible (sur S_+). Il faut calculer:

$$\partial_x\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot(-2x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\end{pmatrix}$$

et

$$\partial_y\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\end{pmatrix}.$$

Il faut contrôler que ϕ est une parametrisation valide, c'est-à-dire que le vecteur $(\partial_x\phi)(x,y)$ et $(\partial_y\phi)(x,y)$ sont linéairement indépendants pour chaque $(x,y)\in D$. Cela est vrai parce que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

a une sous-matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec déterminant qui n'est pas zéro.

Maintenant il faut calculer le produit extérieur

$$((\partial_x \phi)(x,y)) \times ((\partial_y \phi)(x,y)).$$

On rappelle que en général

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$((\partial_x \phi)(x,y)) \times ((\partial_y \phi)(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant il faut aussi trouver un champ unitaire de vecteurs orthogonal à S_+, orienté vers le dehors de la sphère. On défini un champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ comme:

$$N : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad N(x,y,z) := \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right).$$

Si on considère N seulement défini sur S_+, on a que le vecteur $N(x,y,z)$ est orthogonal à S_+ en (x,y,z). En plus, pour chaque point (x,y) en D on a:

$$N(\phi(x,y)) = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}\right),$$

donc:

$$||N(\phi(x,y))|| = \sqrt{\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{R^2-x^2-y^2}{R^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2}} = 1,$$

donc le champ N est un champ unitaire de vecteurs. Maintenant il faut calculer le produit scalaire

$$((\partial_x \phi)(x,y)) \times ((\partial_y \phi)(x,y)) \cdot N(\phi(x,y)) =$$
$$= \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1\right) \cdot \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R}\right) =$$
$$= \frac{1}{R}\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{R} \cdot \frac{x^2+y^2+R^2-x^2-y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} Aire(S_+) &= \int_D |((\partial_x\phi)(x,y)) \times ((\partial_y\phi)(x,y)) \cdot N(\phi(x,y))| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\ &= \int_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, . \end{aligned}$$

Maintenant on considère le changement de coordonnés

$$\psi :]0, R]_r \times [0, 2\pi[_\theta \longrightarrow D_{(x,y)} \smallsetminus \{(0,0)\}, \qquad \psi(r,\theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Comme d'habitude, on a $|\det(J_\psi)| = r$, donc

$$Aire(S_+) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{rR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi R \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, \mathrm{d}r = 2\pi R \Big[-\sqrt{R^2 - r^2} \Big]_0^R = 2\pi R\sqrt{R^2} = 2\pi R^2.$$

Pour raisons de symétrie, on a aussi $Aire(S_-) = 2\pi R^2$, donc $Aire(S) = Aire(S_+) + Aire(S_-) = 4\pi R^2$.

Exercice 7.13 *Soit $a > 0$ et soit*

$$T_a := \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < a \big\} \, .$$

Calculer

$$\int_{T_a} \sqrt{xy} e^{-x-y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

en utilisant le changement de variable $x = tu$, $y = (1-t)u$.

On considère la fonction

$$\phi : \mathbb{R}^2_{(u,t)} \longrightarrow \mathbb{R}^2_{(x,y)} \qquad \phi(u,t) := (tu, (1-t)u)$$

(c'est-à-dire $\phi_x(u,t) = tu$, $\phi_y(u,t) = (1-t)u$). Le Jacobien de ϕ est alors

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \partial_u \phi_x & \partial_t \phi_x \\ \partial_u \phi_y & \partial_t \phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & u \\ 1-t & -u \end{pmatrix},$$

donc

$$|\det J_\phi| = |-tu - u(1-t)| = |-tu - u + tu| = |-u| = |u|.$$

Donc en général ϕ n'est pas un changement de coordonnées valide sur tout $\mathbb{R}^2$ (le déterminant de son Jacobien est $= 0$ pour tout $(0,t) \in \mathbb{R}^2$). La seule chose importante à vérifier est le fait que son Jacobien n'as pas déterminant zéro sur le domaine $\phi^{-1}(T_a)$. Maintenant on a

$$\begin{aligned} R_a := \phi^{-1}(T_a) &= \big\{ (t,u) \in \mathbb{R}^2 \,|\, tu > 0, \quad (1-t)u > 0, \quad tu + (1-t)u < a \big\} = \\ &= \big\{ (t,u) \in \mathbb{R}^2 \,|\, tu > 0, \quad u > tu, \quad tu + u - tu < a \big\} = \\ &= \big\{ (t,u) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u < a, \quad tu > 0, \quad u > tu \big\} \, . \end{aligned}$$

Vu que $tu > 0$ sur R_a, alors $u \neq 0$. Si $u < 0$, alors:

- $tu > 0$ implique $t < 0$;
- $u > tu$ implique $1 < t$.

Ces deux conditions sont incompatibles, donc on a nécessairement $u > 0$. Donc

$$R_a = \big\{(u,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < u < a,\ 0 < t < 1\big\} =]0,a[\times]0,1[.$$

Maintenant la fonction

$$\phi|_{R_a} : R_a \longrightarrow T_a$$

est une bijection, avec déterminant du Jacobien non zéro partout. Donc elle a une inverse, qui est lisse par le théorème de fonctions implicites. Donc on peux calculer:

$$\int_{T_a} \sqrt{xy}e^{-x-y}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{R_a} \sqrt{tu(1-t)u}e^{-tu-u+tu} \cdot |\det J_\phi|\,\mathrm{du}\,\mathrm{dt} =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^a \sqrt{u^2(t-t^2)}e^{-u}|u|\,\mathrm{du}\right)\mathrm{dt}\,.$$

Vu que (t,u) varie sur $]0,1[\times]0,a[$, on a $|u| = u$, $t = |t|$ et $|1-t| = 1-t$, donc on a:

$$\int_0^1 \left(\int_0^a \sqrt{t-t^2}e^{-u}u^2\,\mathrm{du}\right)\mathrm{dt} = \int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t}\,\mathrm{dt} \cdot \int_0^a e^{-u}u^2\,\mathrm{du}\,.$$

Maintenant on utilise le changement de variable $\psi : [0,1]_s \to [0,1]_t$ défini par $\psi(s) := s^2$. Comme ça, on a $\mathrm{dt} = 2s\,\mathrm{ds}$, donc

$$\int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 2s \cdot s\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{ds} = \int_0^1 2s^2(1-s^2)^{1/2}\,\mathrm{ds}\,.$$

On prend le changement de coordonnées $\rho : [0,\pi/2]_\theta \to [0,1]_s$ défini par $\rho(\theta) := \cos\theta$, donc $\mathrm{ds} = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, et

$$\int_0^1 2s^2(1-s^2)^{1/2}\,\mathrm{ds} = \int_{\pi/2}^0 2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cdot(-\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \int_0^{\pi/2} 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2(\theta) - 2\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \left[\theta + \sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{3\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{2} - \frac{\sin(4\theta)}{16}\right]_0^{\pi/2} =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{3\pi}{8} - 0 - 0\right) - \left(0+0-0-0-0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

En plus, si on prend une intégration par parties deux fois, on a

$$\int_0^a e^{-u}u^2\,\mathrm{du} = \Big[-e^{-u}(u^2+2u+2)\Big]_0^a = -e^{-a}(a+1)^2 + 2$$

Donc on a:

$$\int_{T_a} \sqrt{xy}e^{-x-y}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \frac{\pi(2-e^{-a}(a+1)^2)}{8}.$$

Exercice 7.14(1) *Soit $R > 0$ et soit $D_R := [0,R]\times[0,R]$. Montrer que*

$$\int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{dx}\right)^2.$$

Par séparation de variables (et changement de variables $x = y$), on a

$$\int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{dx}\cdot\int_0^R e^{-y^2}\,\mathrm{dy} =$$
$$= \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{dx}\cdot\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{dx}\right)^2 .$$

Exercice 7.14(2) *Soit $R > 0$, notons*

$$C_R := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x>0, \quad y>0, \quad x^2+y^2<R^2\right\}.$$

Calculer

$$I(R) := \int_{C_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

On considère le changement de coordonnées

$$\phi :]0,R[_r \times]0,\pi/2[_\theta \longrightarrow C_R, \quad \phi(r,\theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On sait déjà que $|\det J_\phi| = r$, donc

$$I(R) = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R re^{-r^2}\,\mathrm{dr}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^R re^{-r^2}\,\mathrm{dr} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4}.$$

Exercice 7.14(3) *Montrer que pour tout $R > 0$ on a*

$$I(R) \le \int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \le I(\sqrt{2}R).$$

Pour tout $R > 0$ on a

$$C_R \subseteq D_R \subseteq C_{\sqrt{2}R}$$

(le premier est un quart de disque avec rayon R, le deuxième est un carré avec diagonal $\sqrt{2}R$, le troisième est un quart de disque avec rayon $\sqrt{2}R$). En plus, on a $e^{-x^2-y^2} > 0$ pour chaque $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Donc

$$\int_{C_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \le \int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \le \int_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Donc en utilisant l'Exercice 7.14(2) on a:

$$\frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4} \le \int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \le \frac{\pi(1-e^{-2R^2})}{4}.$$

Exercice 7.14(4) *En utilisant 7.14(1), 7.14(2) et 7.14(3), déduire l'intégrale entre 0 et ∞ de e^{-x^2}.*

En utilisant l'Exercice 7.14(3) et le théorème de deux gendarmes, on a

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4} \le \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \le \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi(1-e^{-2R^2})}{4}.$$

C'est-à-dire:

$$\frac{\pi}{4} \leq \lim_{R\to+\infty} \int_{[0,R]\,\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \leq \frac{\pi}{4},$$

donc

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \frac{\pi}{4}.$$

En utilisant l'Exercice 7.14(1), on a

$$\lim_{R\to+\infty} \left(\int_{[0,R]} e^{-x^2}\,\mathrm{dx}\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Vu que $\int_{[0,R]} e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ est non-négatif, alors cela implique que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \lim_{R\to+\infty} \int_{[0,R]} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 7.15 *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{dx} + (x-y)\,\mathrm{dy}$$

où C est le cercle unité, paramétré dans le sens trigonométrique.

On considère la paramétrisation de C:

$$c : [0, 2\pi[_\theta \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}, \qquad c(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Donc on a $\mathrm{dx} = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{dy} = \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{dx} + (x-y)\,\mathrm{dy} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)+\sin(\theta))(-\sin(\theta)) + (\cos(\theta)-\sin(\theta))\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\cos(\theta)\sin(\theta) - 2\sin^2(\theta) + 1\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \Big[\cos^2(\theta) - (\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)) + \theta\Big]_0^{2\pi} = \Big[\cos^2(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)\Big]_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0.$$

Exercice 7.16(1) *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_C \frac{(y+z)\,\mathrm{dx} + (z+x)\,\mathrm{dy} + (x+y)\,\mathrm{dz}}{x^2+y^2} \tag{0.1}$$

où C es le segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnée $(1,1,1)$ et $(2,2,2)$.

Une paramétrisation du segment de droite C est:

$$c :\, [1,2]_t \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}, \qquad c(t) := (t,t,t).$$

On a $\mathrm{dx} = \mathrm{dy} = \mathrm{dz} = \mathrm{dt}$, donc

$$\int_C \frac{(y+z)\,\mathrm{dx} + (z+x)\,\mathrm{dy} + (x+y)\,\mathrm{dz}}{x^2+y^2} =$$

$$= \int_1^2 \frac{(t+t)+(t+t)+(t+t)}{t^2+t^2}\,\mathrm{dt} = \int_1^2 \frac{3}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[3\log|t|\Big]_1^2 = 3\log(2).$$

Exercice 7.16(2) *Calculer l'intégrale curviligne* (0.1) *où* C *est la partie d'hélice paramétré par la fonction qui a* t *associe* $(\cos(t),\sin(t),t)$ *pour tout* $t\in[0,2\pi]$.

On considère la paramétrisation:

$$c:\ [0,2\pi]_t \longrightarrow C\subset \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}, \qquad c(t) := (\cos(t),\sin(t),t).$$

On a $\mathrm{dx} = -\sin(t)\,\mathrm{dt}$, $\mathrm{dy} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$ et $\mathrm{dz} = \mathrm{dt}$, donc:

$$\int_C \frac{(y+z)\,\mathrm{dx} + (z+x)\,\mathrm{dy} + (x+y)\,\mathrm{dz}}{x^2+y^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(\sin(t)+t)(-\sin(t)) + (\cos(t)+t)\cos(t) + (\cos(t)+\sin(t))}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) - t\sin(t) + \cos^2(t) + t\cos(t) + \cos(t) + \sin(t)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\sin^2(t) - t\sin(t) + t\cos(t) + \cos(t) + \sin(t) + 1\,\mathrm{dt} =$$

$$= \Big[(\sin(t)\cos(t) - t) + (t\cos(t) - \sin(t)) + (t\sin(t) + \cos(t)) + \sin(t) - \cos(t) + t\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= \Big[\sin(t)\cos(t) + t\cos(t) + t\sin(t)\Big]_0^{2\pi} = 0 + 2\pi + 0 - (0+0+0) = 2\pi.$$

Exercice 7.17 *Soit* D *le domaine borné bordé par la courbe d'équation* $x^2+y^2-2y = 0$. *Calculer en utilisant la formule de Green*

$$\int_D (x^2-y^2)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

On a

$$\partial D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+(y-1)^2 = 1\right\},$$

donc ∂D est un cercle centré en $(0,1)$, avec rayon 1. Pour utiliser la formule de Green, il faut donner une paramétrisation de ∂D en sens trigonométrique, c'est-à-dire une paramétrisation telle que le dehors de D reste à droite quand on suit ∂D. Donc on considère la paramétrisation

$$\phi:\ [0,2\pi[_\theta \longrightarrow \partial D\subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}, \qquad \phi(\theta) := (\cos(\theta),\sin(\theta)+1).$$

Donc on a: $\mathrm{dx} = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{dy} = \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

On note:

$$u(x,y) := \frac{y^3}{3} \qquad \text{et} \qquad v(x,y) := \frac{x^3}{3}.$$

Comme ça, on a:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = y^2,$$

donc avec la formule de Green on a:

$$\begin{aligned}\int_D (x^2-y^2)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{\partial D} u(x,y)\,\mathrm{dx} + v(x,y)\,\mathrm{dy} =\\
= \int_{\partial D} \frac{y^3}{3}\,\mathrm{dx} + \frac{x^3}{3}\,\mathrm{dy} =\\
= \int_0^{2\pi} \frac{(\sin(\theta)+1)^3}{3}(-\sin(\theta)) + \frac{\cos^3(\theta)}{3}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta =\\
= \int_0^{2\pi} -\frac{\sin^4(\theta)}{3} - \sin^3(\theta) - \sin^2(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{3} +\\
+ \frac{\cos^4(\theta)}{3} + \cos^3(\theta) + \cos^2(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{3}\,\mathrm{d}\theta =\\
= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4(\theta)-\sin^4(\theta)}{3} + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta +\\
+ \int_0^{2\pi} \cos^3(\theta) - \sin^3(\theta) + \frac{\cos(\theta)-\sin(\theta)}{3}\,\mathrm{d}\theta\,.\end{aligned}$$

Maintenant, on a:

$$\begin{aligned}\frac{\cos^4(\theta)-\sin^4(\theta)}{3} + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) =\\
= \frac{(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}{3} + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) =\\
= \frac{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}{3} + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) =\\
= \frac{4}{3}(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{4\sin(\theta)\cos(\theta)}{3}\right).\end{aligned}$$

On a aussi:

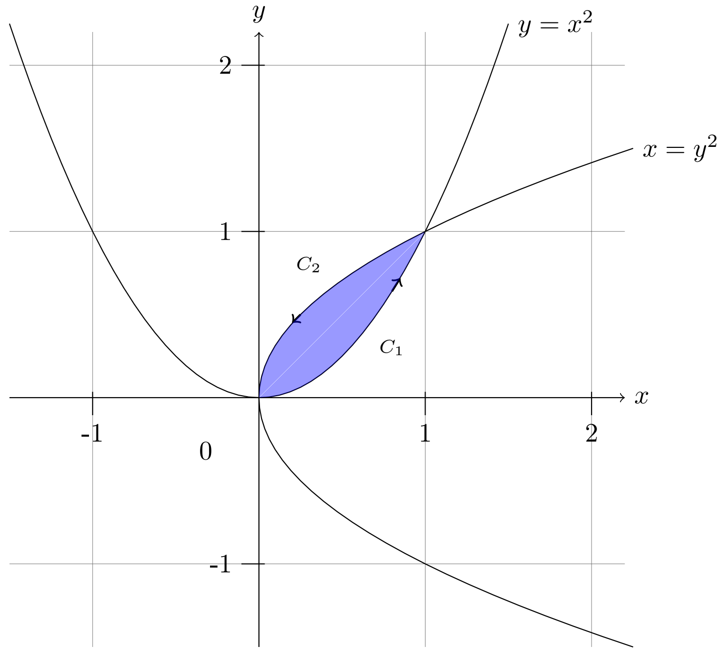
$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) - \sin^3(\theta) + \frac{\cos(\theta)-\sin(\theta)}{3} =\\
= \cos(\theta) - \cos(\theta)\sin^2(\theta) - \sin(\theta) + \cos^2(\theta)\sin(\theta) + \frac{\cos(\theta)-\sin(\theta)}{3} =\\
= \frac{4(\cos(\theta)-\sin(\theta))}{3} - \cos(\theta)\sin^2(\theta) + \sin(\theta)\cos^2(\theta) =\\
= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{4(\sin(\theta)+\cos(\theta))}{3} - \frac{\sin^3(\theta)}{3} - \frac{\cos^3(\theta)}{3}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\int_D (x^2-y^2) = \left[\frac{4\sin(\theta)\cos(\theta)}{3}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{4(\sin(\theta)+\cos(\theta))}{3} - \frac{\sin^3(\theta)}{3} - \frac{\cos^3(\theta)}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Exercice 7.18(1) *Soit C la courbe fermée constituée d'un segment de la parabole d'équation $x^2 = y$ et d'un segment de la parabole d'équation $y^2 = x$, et soit D le domaine borné qu'elle délimite. Calculer*

$$\int_C (2xy - x^2)\,\mathrm{dx} + (x+y^2)\,\mathrm{dy}\,.$$



On note C_1 et C_2 les parties des courbes comme dans le dessin (noter bien l'orientation: comme ça, la courbe $\partial D = C_1 \coprod C_2$ est orientée dans le sens trigonométrique). Une paramétrisation de C_1 est:

$$c_1 : [0,1]_t \longrightarrow C_1 \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}, \qquad c_1(t) := (t, t^2)$$

donc on a $\mathrm{dx} = \mathrm{dt}$, $\mathrm{dy} = 2t\,\mathrm{dt}$ et

$$\int_{C_1} (2xy - x^2)\,\mathrm{dx} + (x + y^2)\,\mathrm{dy} = \int_0^1 (2t^3 - t^2) + (t + t^4) \cdot 2t\,\mathrm{dt} =$$
$$= \int_0^1 2t^3 - t^2 + 2t^2 + 2t^5\,\mathrm{dt} = \int_0^1 2t^5 + 2t^3 + t^2\,\mathrm{dt} =$$
$$= \left[\frac{t^6}{3} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}.$$

Maintenant on note $-C_2$ la courbe C_2 orientée dans le sens opposé. Donc une paramétrisation de $-C_2$ est

$$c_2 : [0,1]_t \longrightarrow \mathbb{R}^2_{(x,y)}, \qquad c_2(t) := (t^2, t),$$

donc on a $\mathrm{dx} = 2t\,\mathrm{dt}$, $\mathrm{dy} = \mathrm{dt}$ et

$$\begin{gathered}\int_{C_2} (2xy - x^2)\,\mathrm{dx} + (x + y^2)\,\mathrm{dy} = -\int_{-C_2} (2xy - x^2)\,\mathrm{dx} + (x + y^2)\,\mathrm{dy} = \\ = -\int_0^1 (2t^3 - t^4)\cdot 2t + (t^2 + t^2)\,\mathrm{dt} = -\int_0^1 4t^4 - 2t^5 + 2t^2\,\mathrm{dt} = \\ = \int_0^1 2t^5 - 4t^4 - 2t^2\,\mathrm{dt} = \left[\frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{17}{15}.\end{gathered}$$

Donc

$$\int_C (2xy - x^2)\,\mathrm{dx} + (x + y^2)\,\mathrm{dy} = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$

Exercice 7.18(2) *Vérifier le résultat de l'Exercice 18(1) avec la formule de Green.*

On peut écrire:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}.$$

On a déjà orienté C dans le sens trigonométrique. On note:

$$u(x, y) := 2xy - x^2 \qquad \text{et} \qquad v(x, y) := x + y^2,$$

donc en utilisant la formule de Green, on a:

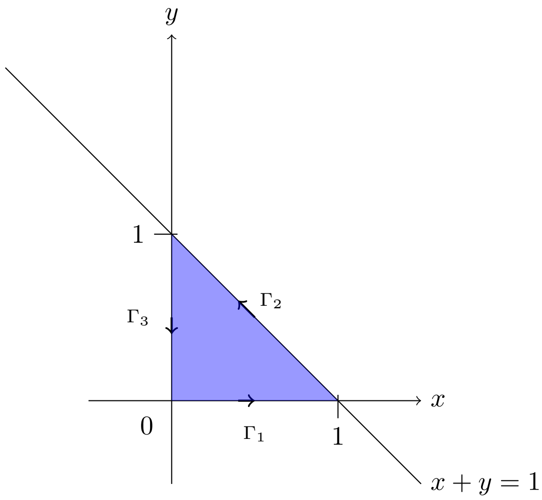
$$\begin{gathered}\int_C (2xy - x^2)\,\mathrm{dx} + (x + y^2)\,\mathrm{dy} = \\ = \int_{\partial D} u(x, y)\,\mathrm{dx} + v(x, y)\,\mathrm{dy} = \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \\ = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{dx} = \\ = \int_0^1 x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3\,\mathrm{dx} = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{4x^{5/2}}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \\ = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{30}.\end{gathered}$$

Exercice 7.19(1) *Soit*

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1\right\}$$

et soit Γ son bord, orienté dans le sens trigonométrique. Calculer directement

$$\int_\Gamma xy^2\,\mathrm{dx} + 2xy\,\mathrm{dy}.$$



On note $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ les segments de droite orientés comme dans le dessin. Pour chaque $i = 1, 2, 3$, on a une paramétrisation c_i de Γ_i comme ça:

$$\begin{aligned}
c_1 : [0,1] &\longrightarrow \Gamma_1, \qquad c_1(t) := (t, 0),\\
c_2 : [0,1] &\longrightarrow \Gamma_2, \qquad c_1(t) := (1-t, t),\\
c_3 : [0,1] &\longrightarrow \Gamma_3, \qquad c_1(t) := (0, 1-t),
\end{aligned}$$

Donc on a:

$$\int_{\Gamma_1} xy^2 \,\mathrm{dx} + 2xy \,\mathrm{dy} = 0,$$

$$\int_{\Gamma_2} xy^2 \,\mathrm{dx} + 2xy \,\mathrm{dy} = \int_0^1 (1-t)t^2(-1) + 2(1-t)t \,\mathrm{dt} =$$
$$= \int_0^1 t^3 - 3t^2 + 2t \,\mathrm{dt} = \left[\frac{t^4}{4} - t^3 + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

et

$$\int_{\Gamma_3} xy^2 \,\mathrm{dx} + 2xy \,\mathrm{dy} = 0.$$

Donc

$$\int_{\Gamma} xy^2 \,\mathrm{dx} + 2xy \,\mathrm{dy} = 0 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.$$

Exercice 7.19(2) *Retrouver le résultat de l'Exercice 7.19(1) en utilisant la formule de Green.*

On peut écrire le domaine D comme:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 - x\right\}.$$

On note

$$u(x,y) := xy^2 \qquad \text{et} \qquad v(x,y) := 2xy.$$

Avec la formule de Green, on a:

$$\int_\Gamma xy^2 \,\mathrm{dx} + 2xy \,\mathrm{dy} = \int_{\partial D} u(x,y)\,\mathrm{dx} + v(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2y - 2xy \,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} =$$
$$= \int_0^1 \left[y^2 - xy^2 \right]_0^{1-x} \mathrm{dx} = \int_0^1 (1-x)^2 - x(1-x)^2 \,\mathrm{dx} =$$
$$= \int_0^1 (1-x)^3 \,\mathrm{dx} = -\int_0^1 (x-1)^3 \,\mathrm{dx} = -\left[\frac{(x-1)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Exercice 7.20 *Soit Σ une surface orientée dans $\mathbb{R}^3$, munie d'un champ de vecteurs orthogonal unitaire N, et soit $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne deux paramétrisations respectant l'orientation $\phi : \Omega \to \Sigma$ et $\phi' : \Omega' \to \Sigma$ de Σ par 2 ouverts Ω, Ω' de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la définition de l'intégrale de u sur Σ ne dépend pas de la paramétrisation choisie, c'est-à-dire que:*

$$\int_\Omega u(\phi(x,y))(\partial_x \phi \times \partial_y \phi) \cdot N \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{\Omega'} u(\phi'(x,y))(\partial_x \phi' \times \partial_y \phi') \cdot N \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

La partie de gauche est

$$A := \int_\Omega u(\phi(x,y)) \left(\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} \times \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} \right) \cdot N(\phi(x,y))\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Si on change coordonnées $(x',y') := (x,y)$, la partie de droite est

$$B := \int_{\Omega'} u(\phi'(x',y')) \left(\frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial x'} \times \frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial y'} \right) \cdot N(\phi'(x',y'))\,\mathrm{dx}'\,\mathrm{dy}'\,.$$

Donc il faut prouver que $A = B$. Maintenant on considère le changement de coordonnées (en 2 dimensions):

$$\psi :\ \Omega'_{(x',y')} \longrightarrow \Omega_{(x,y)}, \qquad \psi := \phi' \circ \phi^{-1}$$

(ψ est un changement de coordonnées parce que ϕ et ϕ' sont 2 paramétrisations de Σ). Vu que ϕ et ϕ' respectent l'orientation de Σ, alors on a $\det(J_\psi) > 0$, donc $|\det(J_\psi)| = \det(J_\psi)$. Alors si on note $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, on a:

$$A = \int_{\Omega'} (\det(J_\psi(x',y'))) \cdot u(\phi \circ \phi^{-1} \circ \phi'(x',y')) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\partial \phi \circ \phi^{-1} \circ \phi'(x',y')}{\partial \psi_1(x',y')} \times \frac{\partial \phi \circ \phi^{-1} \circ \phi'(x',y')}{\partial \psi_2(x',y')} \right) \cdot N(\phi \circ \phi^{-1} \circ \phi'(x',y'))\,\mathrm{dx}'\,\mathrm{dy}' =$$
$$= \int_{\Omega'} u(\phi'(x',y')) \cdot (\det(J_\psi(x',y'))) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial \psi_1(x',y')} \times \frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial \psi_2(x',y')} \right) \cdot N(\phi'(x',y'))\,\mathrm{dx}'\,\mathrm{dy}'\,. \tag{0.2}$$

Maintenant on a:

$$\frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial \psi_1(x',y')} = \frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \psi_1(x',y')} + \frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \psi_1(x',y')}$$

et

$$\frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial \psi_2(x',y')} = \frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \psi_2(x',y')} + \frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \psi_2(x',y')}.$$

Donc on a:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial \psi_1(x',y')} \times \frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial \psi_2(x',y')} = \\ &= \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \psi_1}\right) \times \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \psi_2}\right) + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \psi_1}\right) \times \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \psi_2}\right) + \\ &+ \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \psi_1}\right) \times \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \psi_2}\right) + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \psi_1}\right) \times \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \psi_2}\right). \end{aligned}$$

On rappelle que pour tout $v, w \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $v \times w = -w \times v$, $(\lambda v) \times w = \lambda(v \times w) = v \times (\lambda w)$ et $v \times v = 0$. Dans l'expression en haut, les objets de la forme $\partial\phi'/\partial x'$ et $\partial\phi'/\partial y'$ sont vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (pour chaque x', y' fixé en Ω'), et tous les autres objets sont scalaires en $\mathbb{R}$ (de nouveau, pour chaque x', y' fixé en Ω'). Donc:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial \psi_1(x',y')} \times \frac{\partial \phi'(x',y')}{\partial \psi_2(x',y')} = \\ &= 0 + \frac{\partial x'}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \times \frac{\partial \phi'}{\partial y'} + \frac{\partial y'}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \times \frac{\partial \phi'}{\partial x'} + 0 = \\ &= \left(\frac{\partial x'}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \psi_2} - \frac{\partial y'}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \psi_2}\right) \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \times \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = \\ &= \det(J_{\psi^{-1}}(\psi(x',y')) \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \times \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = \\ &= \frac{1}{\det(J_\psi(x',y')} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \times \frac{\partial \phi'}{\partial y'}. \end{aligned}$$

Si on replace ça en (0.2), on a $A = B$.

Exercice 7.21 *En utilisant la formule de Stokes, calculer le flux du champ de vecteurs $(x, y, -z)$ à travers la demi-sphère $S/2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$.*

On note Σ le domaine de $\mathbb{R}^3$ bordé par la demi-sphère $S/2$. On considère le champs de vecteurs V sur $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(V_x, V_y, V_z) := (x, y, -z)$. Son rotationnel est alors:

$$\nabla \times V = \Big(\partial_y V_z - \partial_z V_y, \partial_z V_x - \partial_x V_z, \partial_x V_y - \partial_y V_x\Big) = (0,0,0),$$

donc en utilisant la formule de Stokes on a

$$\int_{S/2} x\,\mathrm{dx} + y\,\mathrm{dy} - z\,\mathrm{dz} = \int_\Sigma \nabla \times V\,\mathrm{d}\Sigma = 0.$$

Exercice 7.22 *Soit C le cercle de $\mathbb{R}^3$ d'équation*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Calculer

$$\int_C (y+z)\,\mathrm{dx} + (z+x)\,\mathrm{dy} + (x+y)\,\mathrm{dz}$$

d'abord en appliquant la formule de Stokes, puis directement.

On note Σ le domaine borné bordé par C en $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire:

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = -x-y, \quad x^2+y^2+2xy \leq R^2/2\right\}.$$

On note V le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ défini par $(V_x, V_y, V_z) := (y+z, z+x, x+y)$. Alors on a:

$$\nabla \times V = \Big(\partial_y V_z - \partial_z V_y, \partial_z V_x - \partial_x V_z, \partial_x V_y - \partial_y V_x\Big) = (1-1, 1-1, 1-1) = (0,0,0),$$

donc en appliquant la formule de Stokes on a:

$$\int_C (y+z)\,\mathrm{dx} + (z+x)\,\mathrm{dy} + (x+y)\,\mathrm{dz} = \int_\Sigma \nabla \times V \,\mathrm{d}\Sigma = 0.$$

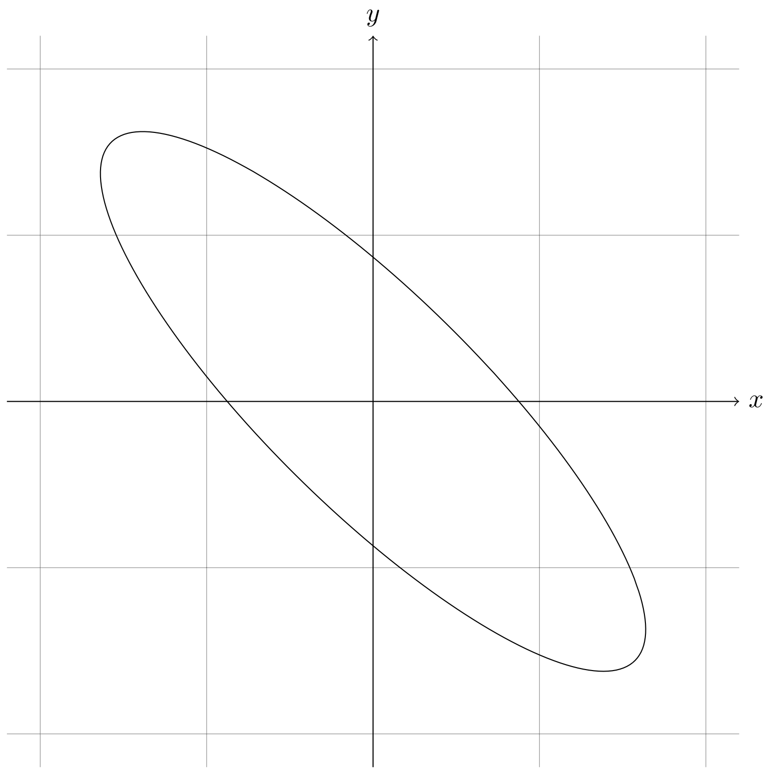
On va retrouver le même résultat avec une intégrale curviligne. Avant tout, il faut trouver une paramétrisation pour C. On peut écrire un système d'équations pour C aussi comme ça:

$$\begin{cases} z = -x-y \\ x^2+y^2+(-x-y)^2 = R^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x-y \\ x^2+y^2+2xy = R^2/2. \end{cases}$$

D'abord, il faut trouver une paramétrisation pour la courbe de $\mathbb{R}^2$:

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2+2xy = R^2/2\right\}.$$

D est une ellipse faite comme ça:



Donc il est difficile de trouver directement une paramétrisation de D. Avant tout, on considère une rotation de $-\pi/4$ au sens trigonométrique. C'est-à-dire, on considère le changement de variables ϕ de $\mathbb{R}^2$ (avec coordonnées (x', y')) vers $\mathbb{R}^2$ avec (avec coordonnées (x, y)):

$$\phi(x', y') = \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right).$$

Si on fixe un point (x', y') in $\mathbb{R}^2$, alors $\phi(x', y') \in D$ si et seulement si

$$\frac{R^2}{2} = x^2+y^2+2xy = \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{(x'+y')(-x'+y')}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{x'^2+3y'^2}{2},$$

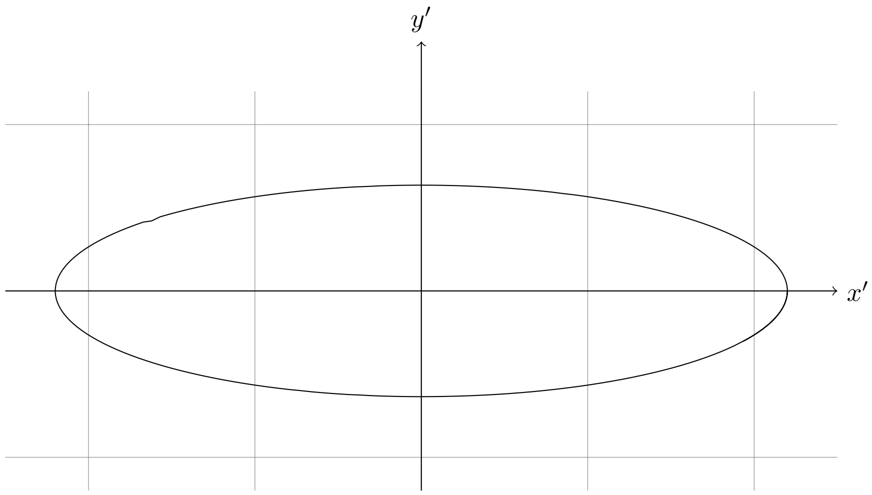
si et seulement si

$$x'^2 + 3y'^2 = R^2.$$

Donc on considère le domaine de $\mathbb{R}^2$

$$E := \left\{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \,|\, x'^2 + 3y'^2 = R^2\right\}.$$

E est encore une ellipse (parce que ϕ est une rotation), et elle est dans la forme standard:



Donc une paramétrisation pour E est facile à trouver:

$$\rho : [0, 2\pi[_\theta \longrightarrow E \subset \mathbb{R}^2_{(x',y')}, \qquad \rho(r, \theta) := \left(r\cos(\theta), \frac{r}{\sqrt{3}}\sin(\theta)\right).$$

Donc une paramétrisation pour D est la fonction

$$\phi \circ \rho : [0, 2\pi[_\theta \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$$

donnée par

$$\phi \circ \rho(\theta) := \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\sin(\theta), -\frac{R}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\sin(\theta)\right).$$

Vu que $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\, z = -x - y\}$, alors une paramétrisation pour C est la fonction

$$\psi : [0, 2\pi[_\theta \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$$

définie par

$$\psi(\theta) := \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\sin(\theta), -\frac{R}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\sin(\theta), -\frac{2R}{\sqrt{6}}\sin(\theta)\right).$$

Donc on a:

$$\begin{aligned} \mathrm{dx} &= -\frac{R}{\sqrt{2}}\sin(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \\ \mathrm{dy} &= \frac{R}{\sqrt{2}}\sin(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \\ \mathrm{dz} &= -\frac{2R}{\sqrt{6}}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned}$$

Donc on a:

$$\begin{aligned} &\int_C (y+z)\,\mathrm{dx} + (z+x)\,\mathrm{dy} + (x+y)\,\mathrm{dz} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}\cos(\theta) - \frac{R}{\sqrt{6}}\sin(\theta)\right)\cdot\left(-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\cos(\theta)\right) + \\ &+ \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\cos(\theta) - \frac{R}{\sqrt{6}}\sin(\theta)\right)\cdot\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\sin(\theta) + \frac{R}{\sqrt{6}}\cos(\theta)\right) + \\ &+ \frac{2R}{\sqrt{6}}\sin\theta\cdot\left(-\frac{2R}{\sqrt{6}}\cos(\theta)\right)\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{R^2}{2}\cos(\theta)\sin(\theta) - \frac{R^2}{2\sqrt{3}}\cos^2(\theta) + \frac{R^2}{2\sqrt{3}}\sin^2(\theta) - \frac{R^2}{6}\cos(\theta)\sin(\theta) + \\ &+ \frac{R^2}{2}\cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{R^2}{2\sqrt{3}}\cos^2(\theta) - \frac{R^2}{2\sqrt{3}}\sin^2(\theta) - \frac{R^2}{6}\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &- \frac{2R^2}{6}\cos(\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{R^2}{6}\cos(\theta)\sin(\theta) - \frac{R^2}{6}\cos(\theta)\sin(\theta) - \frac{2R^2}{6}\cos(\theta)\sin(\theta) = \\ &= \frac{R^2}{3}\int_0^{2\pi} -2\cos(\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{R^2}{3}\Big[\cos^2(\theta)\Big]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Mathematics Research Unit
University of Luxembourg
6, rue Richard Coudenhove-Kalergi
L-1359 Luxembourg

website: http://matteotommasini.altervista.org/

email: matteo.tommasini2@gmail.com