ANALYSE 3B - TRAVAUX DIRIGÉS
CHAPITRE 1 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

MATTEO TOMMASINI

Si vous trouvez des erreurs de français (très probable) ou de mathématiques (moins improbable, mais pas impossible), dite-le-moi, merci!

Exercice 8.1.1(1) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$xy' + 2y = 4x^2 \tag{0.1}$$

avec la condition initiale $y(1) = 2$.

Pour tout $x \neq 0$, (0.1) est équivalent à

$$y' = -\frac{2}{x} \cdot y + 4x. \tag{0.2}$$

Donc d'ici en avant on cherche des solutions pour $x \in I := \mathbb{R}_{<0}$ ou $x \in J := \mathbb{R}_{>0}$. On cherche une primitive $A(x)$ pour la fonction $-2/x$. Une primitive est la fonction

$$A(x) := -2 \log |x| = \log(x^{-2})$$

Donc

$$e^{A(x)} = e^{\log(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

On cherche aussi toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto 4x \cdot e^{-A(x)} = 4x \cdot x^2 = 4x^3.$$

Donc on a

$$\lambda(x) = x^4 + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution générale de (0.2) est

$$y(x) = \lambda(x) \cdot e^{A(x)} = (x^4 + c) \cdot \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{c}{x^2}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R} \tag{0.3}$$

pour $x \in I$ ou $x \in J$. Donc aussi la solution de (0.1) est la même pour tous $x \neq 0$. On est en train de chercher une solution $y(x)$ telle que $y(1) = 2$. Donc il faut choisir l'intervalle $J = \mathbb{R}_{>0}$ et il faut trouver une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que la solution (0.3) associée à c satisfait $y(1) = 2$. Donc il faut que

$$2 = y(1) = 1^2 + \frac{c}{1^2} = 1 + c,$$

donc la seule fonction (0.3) telle que $y(1) = 2$ est celle associée à $c = 1$. Donc la solution de l'exercice est la fonction

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Date: December 5, 2014.

définie sur l'intervalle $J = \mathbb{R}_{>0}$. On peut aussi vérifier directement que cette fonction satisfait les conditions du début.

Exercice 8.1.1(2) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' \sin(x) - y = 1 - \cos(x). \tag{0.4}$$

Pour chaque $x \notin \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, l'equation (0.4) est équivalente à

$$y' = \frac{1}{\sin(x)} \cdot y + \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}. \tag{0.5}$$

Donc on cherche une solution y de (0.5) dans l'intervalle

$$I_k :=]k\pi, (k+1)\pi[$$

pour chaque $k \in \mathbb{Z}$. Maintenant il faut chercher une primitive $A(x)$ pour la fonction $1/\sin(x)$. Une primitive est la fonction

$$A(x) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right) = \log \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$$

parce que

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)(1 + \cos(x)) - (1 - \cos(x))(-\sin(x))}{(1 + \cos(x))^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))} \cdot (\sin(x) + \sin(x)\cos(x) + \sin(x) - \sin(x)\cos(x)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos^2(x)} \cdot 2\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

On remarque que $A(x)$ est bien définie dans chaque I_k parce que ce qui est dedans le logarithme est strictement positif pour chaque $x \in I_k$. Effectivement, pour chaque $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$-1 < \cos(x) < 1,$$

donc

$$0 < 1 + \cos(x) < 2;$$

en plus, on a aussi

$$-1 < -\cos(x) < 1,$$

donc

$$0 < 1 - \cos(x) < 2,$$

donc

$$\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} > 0.$$

Maintenant on a:

$$e^{A(x)} = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}.$$

Maintenant on cherche toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \cdot e^{-A(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}. \tag{0.6}$$

En haut, on a déjà montré que $1-\cos(x)$ et $1+\cos(x)$ sont positifs dans chaque intervalle I_k. Donc on peut écrire $1-\cos(x) = \sqrt{1-\cos(x)}\sqrt{1-\cos(x)}$ et

$$\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}} = \frac{\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{1-\cos(x)}}.$$

Donc la fonction (0.6) est donnée par

$$\begin{aligned} x \mapsto \frac{\sqrt{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}}{\sin(x)} &= \frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\sin(x)} = \\ = \frac{|\sin(x)|}{\sin(x)} &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]2n\pi, (2n+1)\pi[= I_{2n} \\ -1 & \text{si } x \in](2n-1)\pi, 2n\pi[= I_{2n-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc les primitives $\lambda(x)$ de (0.6) sont données par

$$\lambda(x) = x + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

si k est pair et par

$$\lambda(x) = -x + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

si k est impair. Donc la solution générale de (0.5) est donnée par

$$y(x) = \lambda(x) \cdot e^{A(x)} = (x+c)\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

sur chaque intervalle I_k avec k pair. La solution générale de (0.5) est donnée par

$$y(x) = (-x+c)\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

sur chaque intervalle I_k avec k impair.

Exercice 8.1.1(3) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$(1-x^2)y' + xy = 1. \tag{0.7}$$

Pour chaque $x \notin \{-1, 1\}$, (0.7) est équivalente à

$$y' = \frac{-x}{1-x^2} \cdot y + \frac{1}{1-x^2}. \tag{0.8}$$

Donc on doit trouver les solutions de (0.8) sur un intervalle de la forme

$$I_1 = \mathbb{R}_{<-1} \quad \text{ou} \quad I_2 =]-1, 1[\quad \text{ou} \quad I_3 = \mathbb{R}_{>1}.$$

On cherche une primitive $A(x)$ pour la fonction $-x/(1-x^2) = x/(x^2-1)$. Une primitive est la fonction

$$A(x) = \frac{1}{2}\log|x^2-1| = \log\sqrt{|x^2-1|}$$

(on peut enlever le module si on est dans I_1 ou I_3, mais il faut le laisser sur I_2). Donc on a:

$$e^{A(x)} = \sqrt{|x^2-1|}.$$

Maintenant on cherche toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \cdot e^{-A(x)} = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}.$$

On considère deux cas.

(A): on se met dans I_1 ou I_3. Alors $x^2 - 1 > 0$ et on cherche toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto \frac{-1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = -(x^2-1)^{-3/2}.$$

Donc on a

$$\lambda(x) = x(x^2-1)^{-1/2} + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

parce que

$$\lambda'(x) = (x^2-1)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-1)^{-3/2} \cdot 2x =$$
$$= (x^2-1)^{-1/2} - x^2(x^2-1)^{-3/2} = (x^2-1)^{-3/2}(x^2-1-x^2) = -(x^2-1)^{-3/2}.$$

Donc si $x \in I_1$ ou $x \in I_3$, alors la solution de (0.8) est

$$y(x) = \lambda(x)e^{A(x)} = (x(x^2-1)^{-1/2} + c) \cdot (x^2-1)^{1/2} = x + c\sqrt{x^2-1}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

(B): on se met dans I_2. Alors $1 - x^2 > 0$ et on cherche toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-3/2}.$$

Aussi dans ce cas, on a:

$$\lambda(x) = x(1-x^2)^{-1/2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

parce que

$$\lambda'(x) = (1-x^2)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) =$$
$$= (1-x^2)^{-1/2} + x^2(1-x^2)^{-3/2} = (1-x^2)^{-3/2}(1-x^2+x^2) = (1-x^2)^{-3/2}.$$

Donc si $x \in I_2$, alors la solution de (0.8) est

$$y(x) = \lambda(x)e^{A(x)} = (x(1-x^2)^{-1/2} + c) \cdot (1-x^2)^{1/2} = x + c\sqrt{1-x^2}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8.1.1(4) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$xy' + y = y^2 \log(x). \tag{0.9}$$

L'équation est bien définie seulement pour $x > 0$ (si $x < 0$, la fonction $\log(x)$ n'est pas définie en $\mathbb{R}$). On note I un intervalle maximale de $\mathbb{R}_{>0}$ où y est définie (encore à trouver). Pour tout $x > 0$, l'equation (0.9) est équivalente à

$$y' = \frac{-1}{x} \cdot y + \frac{y^2 \log(x)}{x}. \tag{0.10}$$

On note I' un sous-intervalle maximale de I où $y(x)$ n'est pas zéro. Alors pour tout $x \in I'$ (0.10) est équivalente à l'équation de Bernoulli:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{-1}{xy} + \frac{\log(x)}{x}. \tag{0.11}$$

On pose

$$z(x) := \frac{1}{y(x)}, \tag{0.12}$$

donc

$$z'(x) = \frac{-y'(x)}{y^2(x)}.$$

Donc (0.11) est équivalente à l'équation différentielle:

$$-z' = -\frac{z}{x} + \frac{\log(x)}{x},$$

donc (0.11) est aussi équivalente à l'équation différentielle:

$$z' = \frac{z}{x} - \frac{\log(x)}{x}. \tag{0.13}$$

Une primitive $A(x)$ pour la fonction $1/x$ est la fonction $A(x) = \log(x)$ (en général il faut écrire $\log|x|$, mais on est en train de calculer seulement des solutions pour $x \in I' \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_{>0}$). Donc

$$e^{A(x)} = e^{\log(x)} = x.$$

On cherche aussi toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto \frac{-\log(x)}{x} e^{-A(x)} = \frac{-\log(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\log(x)}{x^2}.$$

Donc on a

$$\lambda(x) = \frac{\log(x) + 1}{x} + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

parce que

$$\lambda'(x) = \left(\frac{1}{x} \cdot x - (\log(x) + 1)\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \log(x) - 1}{x^2} = \frac{-\log(x)}{x^2}.$$

Donc la solution générale de (0.13) est

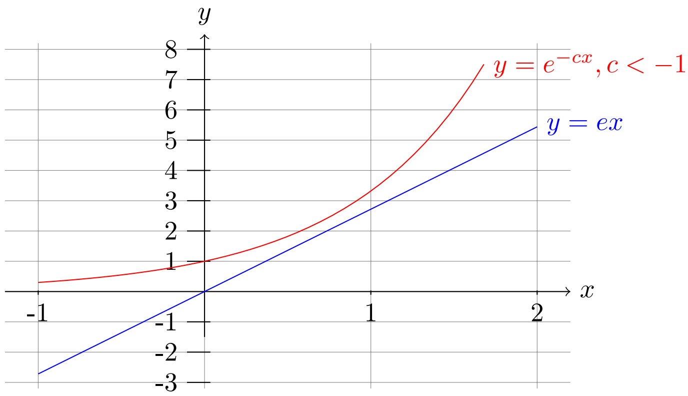
$$z(x) = \lambda(x) e^{A(x)} = \left(\frac{\log(x) + 1}{x} + c\right) \cdot x = \log(x) + 1 + cx, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Maintenant il faut prendre l'inverse de $z(x)$. Donc il faut comprendre quand $z(x)$ est zéro, De manière équivalente, il faut comprendre pour quelle valeur de x on a

$$\log(x) = -1 - cx \quad \Longleftrightarrow \quad ex = e^{-cx}$$

en fonction de c. On a 5 cas comme suit:

(A) si $c < -1$, alors $-c > 1$. Dans ce cas, le graphes de $y = ex$ et de $y = e^{-cx}$ sont comme ça:

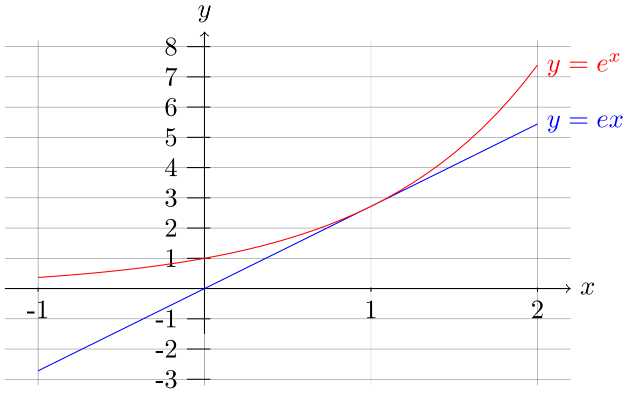


Autrement dit, on a: $ex \neq e^{-cx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (donc en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$) (Exercice facile: prouver ça). Alors on a $z(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, donc en utilisant (0.12), on a une famille de fonctions qui sont solutions de (0.11), comme suit:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\log(x) + 1 + cx}, \qquad \forall\, c < -1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

(B) si $c = -1$, alors la droite $y = ex$ a une seule intersection double avec $y = e^x$ (c'est-à-dire, la droite est tangente à $y = e^x$) dans le point $x = 1$. (Exercice facile: prouver ça):



Autrement dit, on a $z(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $x \in]1, \infty[$. Donc on a une solution de (0.11), comme suit:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\log(x) + 1 - x}$$

pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $x \in]1, \infty[$.

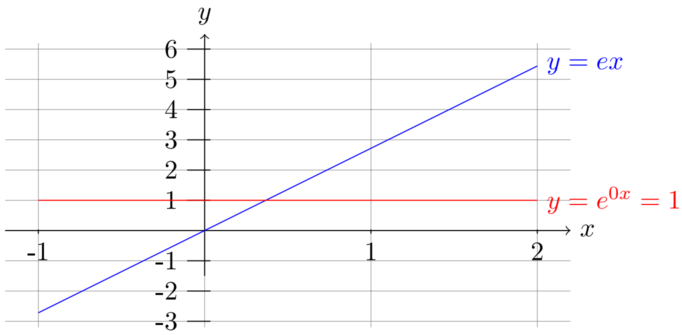
(C) si $-1 < c < 0$, alors $0 < -c < 1$, donc on a (Exercice: prouvez-le) exactement deux points d'intersections $0 < x_c^1 < x_c^2$ (qui dependent de c):

Donc on a une famille de fonctions qui sont solutions de (0.11), comme suit:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\log(x) + 1 + cx}, \qquad \forall -1 < c < 0$$

pour tout $x \in]0, x_c^1[$, pour tout $x \in]x_c^1, x_c^2[$ et pour tout $x \in]x_c^2, \infty[$.

(D) si $c = 0$, alors $e^{cx} = e^0 = 1$, donc on a une seule intersection pour $x = 1/e$.

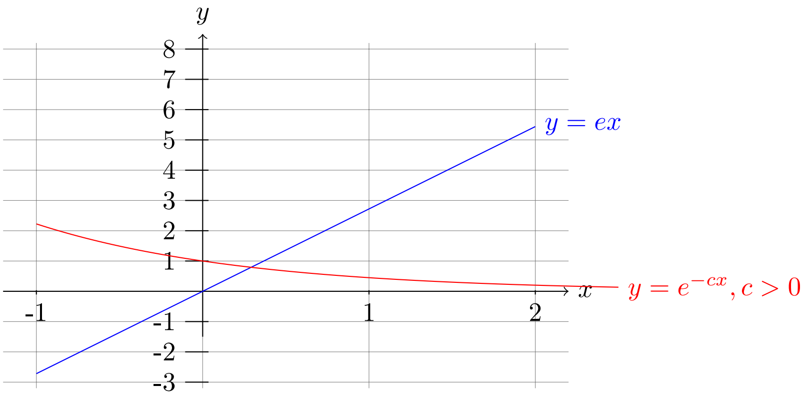


Donc on a une solution de (0.11) comme suit:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\log(x) + 1}$$

pour tout $x \in]0, 1/e[$ et pour tout $x \in]1/e, \infty[$.

(E) si $c > 0$, alors $-c < 0$, donc on a toujours exactement une intersection dans un point x_c^3 (qui depend de c):



Donc on a une famille de solutions pour (0.11), comme suit:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\log(x) + 1 + cx}, \qquad \forall\, c > 0 \tag{0.14}$$

pour tout $x \in]0, x_c^3[$ et pour tout $x \in]x_c^3, \infty[$.

Dans tous les cas précédents, $y(x) \neq 0$ sur son domaine de définition, donc $y(x)$ est aussi solution de (0.11), donc aussi de (0.9).

Exercice 8.1.1(5) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' + 2xy + xy^4 = 0. \tag{0.15}$$

On note I un intervalle maximale où $y(x)$ est définie (encore à trouver). On note I' un sous-intervalle maximal de I où $y(x) \neq 0$. Alors pour tout $x \in I'$ (0.15) est équivalente à l'équatione de Bernoulli

$$\frac{y'}{y^4} = \frac{-2x}{y^3} - x. \tag{0.16}$$

On pose

$$z(x) := \frac{1}{y^3(x)}, \tag{0.17}$$

donc on a

$$z'(x) = \frac{-3y'(x)}{y^4(x)}.$$

Donc (0.16) est équivalente à:

$$\frac{-z'}{3} = -2xz - x,$$

donc (0.16) est aussi équivalente à l'équation différentielle:

$$z' = 6xz + 3x. \tag{0.18}$$

Maintenant une primitive $A(x)$ pour $6x$ est la fonction $A(x) = 3x^2$, donc

$$e^{A(x)} = e^{-3x^2}.$$

On cherche aussi toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto 3xe^{-A(x)} = 3xe^{-3x^2}.$$

Donc on a

$$\lambda(x) = \frac{-e^{-3x^2}}{2} + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution générale de (0.18) est

$$z(x) = \lambda(x)e^{A(x)} = \left(\frac{-e^{-3x^2}}{2} + c\right) e^{3x^2} = ce^{3x^2} - \frac{1}{2}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Maintenant il faut considérer 5 cas différents, comme suit:

(A) Si $c < 0$, alors $ce^{3x^2} < 0$, donc $z(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a une famille de solutions de (0.16) (donc aussi de (0.15)), comme suit:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{ce^{3x^2} - \frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2ce^{3x^2} - 1}}, \qquad \forall\, c < 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(B) Si $c = 0$, alors $z(x) = -1/2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en utilisant (0.17), on a une solution de (0.16) (donc aussi de (0.15)), comme suit:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-1/2}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut aussi vérifier directement que $y(x) = -\sqrt[3]{2}$ est solution de (0.15) parce que:

$$y' + 2xy + xy^4 = 0 + 2x \cdot (-2^{1/3}) + x \cdot 2^{4/3} = -2^{4/3}x + 2^{4/3}x = 0.$$

(C) Si $0 < c < 1/2$, alors il existe un point $x_c > 0$ tel que

$$ce^{3x^2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_c \text{ ou } x = -x_c$$

(il suffit de dessiner un graphe de ce^{3x^2} et de $\frac{1}{2}$ pour s'en apercevoir). Donc on a une famille de solutions de (0.16) (donc aussi de (0.15)), comme suit:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{ce^{3x^2} - \frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2ce^{3x^2} - 1}}, \qquad \forall\, 0 < c < 1/2$$

pour tout $x \in]-\infty, -x_c[$ ou $x \in]-x_c, x_c[$ ou $x \in]x_c, +\infty[$.

(D) Si $c = 1/2$, alors $ce^{3x^2} - \frac{1}{2} = 0$ si et seulement si $x = 0$. Donc on a une solution de (0.16) (donc aussi de (0.15)), comme suit:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{ce^{3x^2} - \frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2ce^{3x^2} - 1}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_{<0}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

(E) Si $c > 1/2$, alors on a $ce^{3x^2} \geq c > 1/2$, donc la fonction $ce^{3x^2} - \frac{1}{2}$ n'est jamais zéro. Donc en utilisant (0.17), on a une famille de solutions de (0.16) (donc aussi de (0.15)), comme suit:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{ce^{3x^2} - \frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2ce^{3x^2} - 1}}, \qquad \forall\, c > 1/2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si on met ensemble tous les cas précédents, la solution générale de (0.15) est

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{ce^{3x^2} - \frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2ce^{3x^2} - 1}}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

pour tout

$$x \in I_c := \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } c \leq 0 \text{ ou } c > 1/2 \\ ]-\infty, -x_c[\coprod]-x_c, x_c[\coprod]x_c, \infty[& \text{si } 0 < c < 1/2 \\ ]-\infty, 0[\coprod]0, \infty[& \text{si } c = 1/2. \end{cases}$$

Exercice 8.1.1(6) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y - xy' + \log(x) = 0. \tag{0.19}$$

Cette équation est bien définie seulement si $x > 0$ à cause du logarithme. Donc (0.19) est équivalente à

$$y' = \frac{1}{x} \cdot y - \frac{\log(x)}{x}. \tag{0.20}$$

Une primitive $A(x)$ pour $1/x$ est la fonction $A(x) = \log(x)$ (a priori il faut écrire $\log|x|$, mais on en train de chercher seulement des solutions pour $x > 0$). Donc

$$e^{A(x)} = e^{\log(x)} = x.$$

Maintenant on cherche toutes les primitives pour la fonction

$$x \mapsto -\frac{\log(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\log(x)}{x^2}.$$

Comme dans l'Exercice 8.1.1(4), on a

$$\lambda(x) = \frac{\log(x) + 1}{x} + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution générale de (0.20) (donc aussi de (0.19)), est:

$$y(x) = \lambda(x) e^{A(x)} = \left(\frac{\log(x) + 1}{x} + c \right) \cdot x = \log(x) + cx + 1, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

pour tout $x > 0$.

Exercice 8.1.1(7) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$x^3 y' + (2 - 3x^2) y = x^3. \tag{0.21}$$

Pour tout $x \neq 0$, (0.21) est équivalente à:

$$y' = \frac{3x^2 - 2}{x^3} \cdot y + 1. \tag{0.22}$$

On cherche une primitive $A(x)$ pour la fonction

$$\frac{3x^2-2}{x^3} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}.$$

Une primitive est la fonction

$$A(x) = 3\log|x| + \frac{1}{x^2} = \log(|x|^3) + \frac{1}{x^2},$$

donc

$$e^{A(x)} = |x|^3 e^{1/x^2}.$$

Maintenant on cherche toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto 1 \cdot e^{-A(x)} = \frac{1}{|x|^3 e^{1/x^2}}.$$

Si $x > 0$, on a

$$\lambda(x) = \frac{1}{2e^{1/x^2}} + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

parce que

$$\lambda'(x) = \frac{1}{2} e^{-1/x^2} \cdot \left(-\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{x^3 e^{1/x^2}} = \frac{1}{|x|^3 e^{1/x^2}}.$$

Si $x < 0$, on a

$$\lambda(x) = \frac{-1}{2e^{1/x^2}} + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

parce que

$$\lambda'(x) = \frac{-1}{2} e^{-1/x^2} \cdot \left(-\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) = -\frac{1}{x^3 e^{1/x^2}} = \frac{1}{(-x)^3 e^{1/x^2}} = \frac{1}{|x|^3 e^{1/x^2}}.$$

Donc la solution de (0.22) (donc aussi de (0.21)) est donnée par

$$y(x) = \lambda(x) e^{A(x)} = \left(\frac{1}{2e^{1/x^2}} + c\right)(x^3 e^{1/x^2}) = \frac{x^3}{2} + c x^3 e^{1/x^2}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

si $x > 0$. La solution de (0.21) est donnée par

$$y(x) = \lambda(x) e^{A(x)} = \left(\frac{-1}{2e^{1/x^2}} + c\right)((-x)^3 e^{1/x^2}) = \frac{x^3}{2} - c x^3 e^{1/x^2}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

si $x < 0$. Vu que c varie librement sur $\mathbb{R}$, si $x < 0$ on peut écrire la solution de (0.21) aussi comme ça:

$$y(x) = \frac{x^3}{2} + c x^3 e^{1/x^2}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

pour tout $x < 0$. Donc on obtient la même expression pour tout $x \neq 0$.

Exercice 8.1.1(8) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' + y = y^2(\cos(x) - \sin(x)). \tag{0.23}$$

On note I un intervalle maximale où y est définie (encore à trouver). On note I' un sous-intervalle maximal de I, où $y(x) \neq 0$. Alors pour tout $x \in I'$ (0.23) est équivalente à:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{-1}{y} + \cos(x) - \sin(x). \tag{0.24}$$

On pose

$$z(x) := \frac{1}{y(x)}, \tag{0.25}$$

donc (0.24) est équivalente à

$$-z' = -z + \cos(x) - \sin(x);$$

donc (0.24) est aussi équivalente à l'équation différentielle

$$z' = z + \sin(x) - \cos(x). \tag{0.26}$$

Une primitive $A(x)$ pour 1 est x, donc $e^{A(x)} = e^x$. On cherche toutes les primitives $\lambda(x)$ pour la fonction

$$x \mapsto (\sin(x) - \cos(x))e^{-A(x)} = e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)).$$

On a

$$\lambda(x) = -e^{-x}\sin(x) + c, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

parce que

$$\lambda'(x) = -(-e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x)) = e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)).$$

Donc la solution générale de (0.26) est

$$z(x) = \lambda(x)e^{A(x)} = (-e^{-x}\sin(x) + c)e^x = ce^x - \sin(x), \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note I'' un intervalle maximal de $\mathbb{R}$, tel que $ce^x \neq \sin(x)$, $\forall\, x \in I''$. Donc la solution générale de (0.24), donc aussi de (0.23), est

$$y(x) = \frac{1}{ce^x - \sin(x)}, \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in I''$.

Exercice 8.2.1 *On considère l'équation de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{0.27}$$

sur l'intervalle $]-1, 1[$. *Vérifier que* $y_1(x) = x$ *est solution, et en déduire toutes les solutions.*

On vérifie que $y_1(x) = x$ est solution:

$$(1 - x^2)y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = (1 - x^2) \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2x = 0.$$

On cherche une deuxième solution $y_2(x)$ avec la méthode de la variation de la constante. C'est-à-dire, on cherche une fonction $v(x)$ (au moins de classe C^2), telle que la fonction

$$y_2(x) := v(x)y_1(x) = v(x)x$$

est solution de (0.27). On a

$$y_2'(x) = v'(x)x + v(x) \quad \text{et} \quad y_2''(x) = v''(x)x + v'(x) + v'(x) = v''(x)x + 2v'(x).$$

Donc il faut que

$$0 = (1 - x^2)y_2'' - 2xy_2' + 2y_2 =$$

$$= (1-x^2)(v''(x)x + 2v'(x)) - 2x(v'(x)x + v(x)) + 2v(x)x =$$
$$= v''(x)(x-x^3) + v'(2-2x^2-2x^2) + v(x)(-2x+2x).$$

Donc $y_2(x)$ est solution de (0.27) si et seulement si $v(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$v''(x)(x-x^3) + v'(x)(2-4x^2) = 0. \tag{0.28}$$

On pose

$$z(x) := v'(x). \tag{0.29}$$

Donc pour tout $x \in]-1,1[$ (0.28) est équivalente à

$$z'(x) = \frac{4x^2-2}{x-x^3} \cdot z(x). \tag{0.30}$$

On cherche un primitive $A(x)$ pour la fonction

$$\frac{4x^2-2}{x-x^3} = \frac{2x^2-2}{x-x^3} + \frac{2x^2}{x-x^3} = -\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}.$$

Pour tout $x \in]-1,0[$ ou $x \in]0,1[$ une primitive est la fonction

$$A(x) = -2\log|x| - \log(1-x^2) = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) + \log\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \log\left(\frac{1}{x^2(1-x^2)}\right)$$

(cette fonction est bien définie parce que $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$). Vu que (0.30) est une équation homogène, alors la solution générale de (0.30) est

$$z(x) = \lambda e^{A(x)} = \frac{\lambda}{x^2(1-x^2)}, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in]-\infty,-1[$ ou $]-1,0[$ ou $]0,1[$ ou $]1,\infty[$. Pour tout $x \in]-1,0[$ ou $x \in]0,1[$, en utilisant (0.29) on a

$$v'(x) = \frac{\lambda}{x^2(1-x^2)}, \tag{0.31}$$

donc il faut chercher une primitive pour la fonction

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)}$$

pour $x \in]-1,0[$ ou $x \in]0,1[$. On essaie d'écrire

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1,0,1\} \tag{0.32}$$

pour des constantes $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ encore à déterminer. (0.32) est satisfaite si et seulement si

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{Ax(1-x^2) + B(1-x^2) + Cx^2(1+x) + Dx^2(1-x)}{x^2(1-x^2)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1,0,1\},$$

si et seulement si

$$x^3(-A+C-D) + x^2(-B+C+D) + Ax + (B-1) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1,0,1\},$$

si et seulement si

$$\begin{cases} -A+C-D=0 \\ -B+C+D=0 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=1/2 \\ D=1/2. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2-2x} + \frac{1}{2+2x}. \tag{0.33}$$

Une primitive de (0.33) pour $x \in]-1,0[$ ou $\in]0,1[$ est la fonction

$$-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log|1-x| + \frac{1}{2}\log|1+x| = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Vu que $x \in]-1,0[$ ou $\in]0,1[$, alors on a $1+x>0$ et $1-x>0$, donc on peut enlever la valeur absolue en haut. Donc en utilisant (0.31) on a que

$$v(x) = \lambda\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) + \mu \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

On rappelle qu'on est en train de chercher une solution particulière $y_2(x) = v(x)x$, donc on peut choisir les constantes μ, λ comme on veut, à condition que $\{x, y_2(x)\}$ soit un système fondamental. Donc on choisi $\mu = 0$ et $\lambda = 2$. Comme ça, on a une solution

$$v(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{2}{x},$$

donc on a une deuxième solution de (0.27):

$$y_2(x) = v(x)x = x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2.$$

A priori, cette solution est valide seulement pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, mais on peut vérifier directement qu'elle est bien définie (et C^2) aussi pour $x=0$ et qu'elle satisfait (0.27) pour tout $x \in]-1,1[$ (Exercice: vérifier ça).

Maintenant, il faut vérifier que $\{x, y_2(x)\}$ est un système fondamental pour l'équation homogene (0.27); autrement dit, il faut vérifier qu'il y a un point $x_0 \in]-1,1[$, tel que le Wronskien de $y_1(x) = x$ et y_2 n'est pas zéro en x_0. On choisi $x_0 = 0$. Pour ce point, on a

$$W_{y_1,y_2}(x_0) = \det\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & y_2'(0) \end{pmatrix} = 0\cdot y_2'(0) - (-2) = 2 \neq 0.$$

Donc on a trouvé un système fondamental de solutions pour (0.27). Donc la solution générale est

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \alpha x + \beta\left(x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2\right), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in]-1,1[$.

Exercice 8.2.2 *On considère l'équation*

$$x^2y'' - 2y = 0 \tag{0.34}$$

sur l'intervalle $]0,\infty[$. *Vérifier que* $y_1(x) = x^2$ *est solution, et en déduire toutes les solutions de l'équation*

$$x^2y'' - 2y = 2x - 1 \tag{0.35}$$

sur $]0, \infty[$.

On verifie que $y_1(x) = x^2$ est solution de (0.34):

$$x^2y_1(x)'' - 2y_1 = 2x^2 - 2x^2 = 0.$$

On cherche une deuxième solution $y_2(x)$ de (0.34) avec la méthode de la variation de la constante. Donc on cherche une fonction $v(x)$ (au moins de classe C^2), telle que la fonction $y_2(x) := x^2v(x)$ est une solution. On a

$$y_2'(x) = 2xv(x) + x^2v'(x)$$

et

$$y_2''(x) = 2v(x) + 2xv'(x) + 2xv'(x) + x^2v''(x) = x^2v''(x) + 4xv'(x) + 2v(x).$$

Donc il faut que

$$\begin{aligned}0 = x^2y_2'' - 2y_2 = x^2(x^2v''(x) + 4xv'(x) + 2v(x)) - 2x^2v(x) = \\ = x^4v''(x) + 4x^3v'(x) + 2x^2v(x) - 2x^2v(x) = x^4v''(x) + 4x^3v'(x).\end{aligned}$$

Donc $y_2 = x^2v(x)$ est solution de (0.34) sur $]0, \infty[$ si et seulement si $v(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$v''(x) = -\frac{4}{x} \cdot v'(x) \tag{0.36}$$

pour $x > 0$. On pose

$$z(x) := v'(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}, \tag{0.37}$$

donc (0.36) est équivalente à l'équation différentielle

$$z'(x) = -\frac{4}{x} \cdot z(x) \tag{0.38}$$

pour $x > 0$. Par hypothèse, on a $x \in]0, \infty[$, donc une primitive de $-4/x$ est la fonction $A(x) = -4\log(x) = \log(x^{-4})$. Donc la solution générale de l'équation homogène (0.38) est

$$z(x) = \lambda \cdot e^{A(x)} = \frac{\lambda}{x^4}, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

pour tout $x > 0$. En utilisant (0.37), on a

$$v'(x) = \frac{\lambda}{x^4},$$

donc

$$v(x) = \frac{-\lambda}{3x^3} + \mu, \qquad \forall\, \mu \in \mathbb{R}$$

pour tout $x > 0$. Vu qu'on est en train de chercher une solution particulière $y_2(x) = x^2v(x)$, on peut choisir les constantes λ, μ qu'on préfère, à condition que $\{y_1(x) = x^2, y_2(x)\}$ soit un système fondamental de solutions. On choisi $\lambda = -3$ et $\mu = 0$, donc on a une solution particulière de (0.36):

$$v(x) = \frac{1}{x^3}$$

pour tout $x > 0$ (on peut aussi vérifier directement que $v(x)$ est une solution de (0.36)). Donc on a une solution particulière de (0.34) comme suit:

$$y_2(x) = x^2 v(x) = \frac{1}{x}$$

pour tout $x > 0$. Maintenant il faut vérifier que $\{y_1(x), y_2(x)\}$ est un système fondamental pour (0.34), donc il faut montrer qu'il y a un point $x_0 > 0$ tel que le Wronskien de $\{x^2, 1/x\}$ n'est pas zéro en x_0. On choisi $x_0 = 1$, donc on a:

$$W_{y_1,y_2}(x_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0,$$

donc $\{x^2, 1/x\}$ est un système fondamental. Donc la solution générale de (0.34) est

$$y(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x}, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

pour tout $x > 0$. Maintenant il faut trouver la solution générale de (0.35). Avant tout, il faut mettre (0.35) dans la forme standard, donc il faut écrire (0.35) comme:

$$y''(x) - \frac{2}{x^2} \cdot y(x) = \frac{2x-1}{x^2} \tag{0.39}$$

pour tout $x > 0$. On cherche une solution particulière de (0.39) avec la méthode de la variation de la constante, donc on cherche deux fonctions $c_1, c_2 :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, telles que pour tout $x > 0$ on a:

$$\begin{cases} c_1(x) \cdot x^2 + c_2(x) \cdot x^{-1} = 0 \\ c_1(x) \cdot 2x + c_2(x) \cdot (-x^{-2}) = (2x-1)x^{-2}. \end{cases}$$

Donc il faut:

$$\begin{cases} c_1(x) = -c_2(x) x^{-3} \\ 2x \cdot (-c_2(x) x^{-3}) - c_2(x) x^{-2} = (2x-1)x^{-2}, \end{cases}$$

qui est équivalent à:

$$\begin{cases} c_1(x) = -c_2(x) x^{-3} & & \Rightarrow\ c_1(x) = (2x-1)/(3x^3) \\ -3c_2(x) = 2x - 1 & \Rightarrow\ c_2(x) = (1-2x)/3. & \end{cases}$$

Maintenant on cherche une primitive C_1 pour c_1 et une primitive C_2 pour c_2. On a:

$$c_1(x) = \frac{2x-1}{3x^3} = \frac{2}{3}x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-3},$$

donc une primitive est

$$C_1(x) = -\frac{2}{3x} + \frac{1}{6x^2} = \frac{1-4x}{6x^2}.$$

En plus, une primitive C_2 est

$$C_2(x) = \frac{x - x^2}{3}.$$

Donc une solution particulière de (0.39) est:

$$y_0(x) = C_1(x) \cdot x^2 + C_2(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1-4x}{6x^2} \cdot x^2 + \frac{x-x^2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 - 4x + 2 - 2x}{6} = \frac{1}{2} - x$$

pour tout $x \in]0, \infty[$ (on peut aussi vérifier directement que y_0 est solution de (0.39)). Donc la solution générale de (0.39) (donc aussi de (0.35)) est:

$$y(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot \frac{1}{x} + y_0(x) = \alpha \cdot x^2 - x + \frac{1}{2} + \beta \cdot \frac{1}{x}, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

pour tout $x > 0$.

Exercice 8.3(1) *Résoudre l'équation suivante*

$$y'' + y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \tag{0.40}$$

L'équation est bien définie sur un intervalle I_k de la forme $]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}$.

Le polynôme associé à l'équation homogène est $T^2 + 1$, dont le racines sont i et $-i$. Donc un système fondamental de solutions pour l'équation homogène est $\{\cos(x), \sin(x)\}$. On cherche une solution particulière de (0.40) avec la méthode de la variation de la constante, donc on cherche $c_1(x)$ et $c_2(x)$, telles que:

$$\begin{cases} c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x) = 0 \\ -c_1(x)\sin(x) + c_2(x)\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} c_2(x) \\ \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} c_2(x) + c_2(x)\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{cases}$$

Donc il faut

$$c_2(x) \cdot \left(\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

donc

$$c_2(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad c_1(x) = -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} = \cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}.$$

Une primitive C_1 pour c_1 est

$$C_1(x) = \sin(x) + \log\left|\frac{\cos(x/2) - \sin(x/2)}{\cos(x/2) + \sin(x/2)}\right|$$

parce que

$$\begin{aligned} C_1'(x) = \cos(x) + \frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)} \cdot \frac{1}{(\cos(x/2) + \sin(x/2))^2} \cdot \\ \cdot \frac{1}{2}\Big[(-\sin(x/2) - \cos(x/2))(\cos(x/2) + \sin(x/2)) \\ -(\cos(x/2) - \sin(x/2))(-\sin(x/2) + \cos(x/2))\Big] = \\ = \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} \cdot \\ \cdot \frac{1}{2}\Big[- \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) - 2\cos(x/2)\sin(x/2) \\ - \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) + 2\cos(x/2)\sin(x/2)\Big] = \\ = \cos(x) + \frac{1}{2\cos^2(x/2) - 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) = \\ = \cos(x) - \frac{1}{2\cos^2(x/2) - 1} \overset{(*)}{=} \cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}, \end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ est une conséquence du fait que $\cos^2(x/2) = (1 + \cos(x))/2$. On remarque que la fonction $C_1(x)$ est bien définie parce que pour tout $x \in I_k$ on a:

$$\cos(x/2)+\sin(x/2)\neq 0 \quad \text{et} \quad \cos(x/2)-\sin(x/2)\neq 0.$$

Une primitive C_2 pour c_2 est $C_2=-\cos(x)$. Donc une solution particulière de (0.40) est

$$\begin{aligned} y_0(x) &= C_1(x)\cos(x)+C_2(x)\sin(x)= \\ &= \sin(x)\cdot\cos(x)+\log\left|\frac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\cos(x/2)+\sin(x/2)}\right|\cdot\cos(x)-\cos(x)\sin(x)= \\ &= \log\left|\frac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\cos(x/2)+\sin(x/2)}\right|\cdot\cos(x). \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (0.40) est

$$y(x)=\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)+\log\left|\frac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\cos(x/2)+\sin(x/2)}\right|\cdot\cos(x), \qquad \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

sur chaque intervalle $I_k=]k\pi-\pi/2,k\pi+\pi/2[$ pour chaque $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 8.3(2) *Résoudre l'équation suivante*

$$y''-y=\frac{e^{2x}}{e^x-1}. \tag{0.41}$$

Afin que (0.41) soit bien définie, il faut que $e^x\neq 1$, c'est-à-dire il faut $x\neq 0$. Donc on cherche une solution pour $I:=\mathbb{R}_{<0}$ ou pour $J:=\mathbb{R}_{>0}$. On considère l'équation linéaire homogène associée

$$y''-y=0. \tag{0.42}$$

L'équation polynomiale associée est:

$$T^2-1=0,$$

dont le deux racines différentes sont $+1$ et -1. Donc un système fondamental de solutions pour (0.42) est donné par $\{e^x,e^{-x}\}$. Maintenant on cherche une solution particulière de (0.41) avec la méthode de la variation de la constante. Donc on cherche $c_1(x)$ et $c_2(x)$, telles que:

$$\begin{cases} c_1(x)e^x+c_2(x)e^{-x}=0 \\ c_1(x)e^x-c_2(x)e^{-x}=\frac{2e^x}{e^x-1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1(x)=-c_2(x)e^{-2x} \\ -c_2(x)e^{-x}-c_2(x)e^{-x}=\frac{2e^x}{e^x-1}. \end{cases}$$

Donc

$$c_2(x)=\frac{-1}{2e^{-x}}\cdot\frac{2e^x}{e^x-1}=\frac{-e^{2x}}{e^x-1}$$

et

$$c_1(x)=-c_2(x)e^{-2x}=\frac{e^{2x}}{e^x-1}e^{-2x}=\frac{1}{e^x-1}.$$

Maintenant on cherche une primitive C_1 pour c_1 et une primitive C_2 pour c_2. On peut choisir:

$$C_1(x)=\log|e^x-1|-x \qquad \text{et} \qquad C_2(x)=-e^x-\log|e^x-1|$$

(vu qu'on considère seulement $x\neq 0$, C_1 et C_2 sont bien définies). Donc une solution particulière de (0.41) est

$$y_0(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} = (\log|e^x - 1| - x)e^x + (-e^x - \log|e^x - 1|)e^{-x} =$$
$$= \log|e^x - 1|(e^x - e^{-x}) - xe^x - 1$$

pour tout $x \in I$ ou $x \in J$. Donc la solution générale de (0.41) est:

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + \log|e^x - 1|(e^x - e^{-x}) - xe^x - 1, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

pour $x \in I$ ou $x \in J$.

Exercice 8.3(3) *Résoudre l'équation suivante*

$$y'' + a^2 y = e^x, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{0.43}$$

On doit considérer séparément les cas avec $a = 0$ et $a \neq 0$.

(A) Si $a = 0$, alors $y''(x) = 0$, donc un système fondamental d'équations est donné par $y_1(x) = 1$ et $y_2(x) = x$ (Exercice simple: vérifier ça). Avec la méthode de la variation de la constante, on cherche $c_1(x)$ et $c_2(x)$, telles que:

$$\begin{cases} c_1(x) \cdot 1 + c_2(x) \cdot x = 0 \\ c_1(x) \cdot 0 + c_2(x) \cdot 1 = e^x. \end{cases}$$

Donc on a $c_1(x) = -xe^x$ et $c_2(x) = e^x$. Une primitive de c_1 est $C_1(x) = e^x - xe^x$, une primitive de c_2 est $C_2(x) = e^x$. Donc une solution particulière de (0.43) est:

$$y_0(x) = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cdot x = e^x - xe^x + xe^x = e^x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on pouvait aussi trouver $y_0(x)$ directement). Donc si $a = 0$, alors la solution générale de (0.43) est

$$y(x) = \alpha + \beta x + e^x, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(B) Si $a \neq 0$, alors le polynôme associé au cas homogène est $T^2 + a^2$, dont les racines différentes sont $\pm ia$. Donc un système fondamental de solutions pour le cas homogène est donné par:

$$y_1(x) = \cos(ax), \qquad y_2(x) = \sin(ax)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière $y_0(x)$ de (0.43) avec la méthode de la variation de la constante, donc on cherche $c_1(x)$ et $c_2(x)$ telles que

$$\begin{cases} c_1(x)\cos(ax) + c_2(x)\sin(ax) = 0 \\ -ac_1(x)\sin(ax) + ac_2(x)\cos(ax) = e^x. \end{cases}$$

Donc on a:

$$c_1(x) = -\frac{e^x \sin(ax)}{a}, \qquad c_2(x) = \frac{e^x \cos(ax)}{a}.$$

Maintenant si on prend une intégration par partie, une primitive de c_1 est la fonction

$$C_1(x) = \frac{e^x(-\sin(ax) + a\cos(ax))}{a(a^2+1)}$$

et une primitive de c_2 est la fonction

$$C_2(x) = \frac{e^x(a\sin(ax) + \cos(ax))}{a(a^2+1)}.$$

Donc une solution particulière de (0.43) est la fonction

$$y_0(x) = C_1(x)\cos(ax) + C_2(x)\sin(ax) =$$
$$= \frac{e^x}{a(a^2+1)}\big(-\sin(ax)\cos(ax) + a\cos^2(ax) + a\sin^2(ax) + \sin(ax)\cos(ax)\big) =$$
$$= \frac{e^x}{a(a^2+1)} \cdot a = \frac{e^x}{a^2+1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on peut aussi vérifier directement que $y_0(x)$ est solution). Donc la solution générale de (0.43) est:

$$y(x) = \lambda\cos(ax) + \mu\sin(ax) + \frac{e^x}{a^2+1}, \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.3(4) *Résoudre l'équation suivante*

$$y'' - y = e^x. \tag{0.44}$$

Comme dans l'Exercice 8.3(2), un système fondamental de solution pour l'équation homogène associée à (0.44) est $\{e^x, e^{-x}\}$. On cherche une solution particulière de (0.44) avec la méthode de la variation de la constante. Donc on cherche $c_1(x), c_2(x)$, telles que

$$\begin{cases} c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} = 0 \\ c_1(x)e^x - c_2(x)e^{-x} = e^x \end{cases} \iff \begin{cases} c_1(x) = -c_2(x)e^{-2x} \\ -c_2(x)e^{-x} - c_2(x)e^{-x} = e^x. \end{cases}$$

Donc on a

$$c_2(x) = \frac{-e^x}{2e^{-x}} = \frac{-e^{2x}}{2}$$

et

$$c_1(x) = -c_2(x)e^{-2x} = \frac{e^{2x}}{2}e^{-2x} = \frac{1}{2}.$$

Une primitive pour c_1 est $C_1(x) = x/2$; une primitive pour c_2 est $C_2(x) = -e^{2x}/4$. Donc une solution particulière de (0.44) est:

$$y_0(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} = \frac{xe^x}{2} - \frac{e^{2x}e^{-x}}{4} = e^x\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la solution générale de (0.44) est:

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + e^x\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut aussi écrire:

$$y(x) = \gamma e^x + \delta e^{-x} + \frac{xe^x}{2} \qquad \forall\, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.3(5) *Résoudre l'équation suivante*

$$y''' + y'' = x. \tag{0.45}$$

Le polynôme associé au cas homogène est $T^3 + T^2$, dont le racines sont $T = -1$ (une fois) et $T = 0$ (deux fois). Donc un système fondamental de solutions pour le cas homogène est:

$$y_1(x) = e^{-x}, \qquad y_2(x) = 1, \qquad y_3(x) = x.$$

On cherche une solution particulière de (0.45) avec variation de la constante, donc on cherche $c_1(x)$, $c_2(x)$ et $c_3(x)$, telles que:

$$\begin{cases} c_1(x)e^{-x} + c_2(x) + c_3(x)x = 0 \\ -c_1(x)e^{-x} + c_3(x) = 0 \\ c_1(x)e^{-x} = x \quad \Longrightarrow \quad c_1(x) = xe^x. \end{cases}$$

Donc on a $c_3(x) = c_1(x)e^{-x} = xe^x e^{-x} = x$ et $c_2(x) = -x - x^2$. Donc on peut choisir les primitives comme suit:

$$C_1(x) = xe^x - e^x, \quad C_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad C_3(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Donc une solution particulière de (0.45) est:

$$y_0(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x) + C_3(x)x = x - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1.$$

Vu que x et 1 sont solutions du cas homogène, alors une autre solution particulière de (0.45) est

$$\widetilde{y}_0(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la solution générale de (0.45) est

$$y(x) = \lambda e^{-x} + \mu + \rho x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.3(6) *Résoudre l'équation suivante*

$$y''' - 4y' = \sin(x). \tag{0.46}$$

On pose $z(x) := y'(x)$, donc on a:

$$z''(x) - 4z(x) = \sin(x). \tag{0.47}$$

Le polinôme associé a l'équation homogène est $T^2 - 4$, dont les racines différentes sont ± 2. Donc on a un système fondamental de solutions pour le cas homogène donné par:

$$z_1(x) = e^{2x} \qquad \text{et} \qquad z_2(x) = e^{-2x}.$$

On cherche une solution particulière de (0.47) avec la méthode de la variation de la constante. Donc on cherche $c_1(x)$ et $c_2(x)$, telles que

$$\begin{cases} c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{-2x} = 0 \\ 2c_1(x)e^{2x} - 2c_2(x)e^{-2x} = \sin(x). \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c_1(x) = -c_2(x)e^{-4x} \\ -2c_2(x)e^{-2x} - 2c_2(x)e^{-2x} = \sin(x). \end{cases}$$

Donc on a

$$c_1(x) = \frac{e^{-2x}\sin(x)}{4} \qquad \text{et} \qquad c_2(x) = \frac{-e^{2x}\sin(x)}{4}.$$

On cherche une primitive $C_1(x)$ pour c_1 de la forme

$$C_1(x) = \lambda e^{-2x}(A\sin(x) + B\cos(x))$$

où λ, A, B sont des constantes réelles encore à trouver. Il faut que

$$\lambda e^{-2x}(-2A\sin(x) - 2B\cos(x) + A\cos(x) - B\sin(x)) = C_1'(x) = c_1(x) = \frac{e^{-2x}\sin(x)}{4}.$$

Donc on choisi $\lambda = 1/4$ and A, B telles que:

$$-2A - B = 1 \qquad \text{et} \qquad -2B + A = 0,$$

donc $A = -2/5$ et $B = -1/5$. Donc une primitive pour c_1 est

$$C_1(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}\left(-\frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)\right) = -\frac{e^{-2x}}{20}(2\sin(x) + \cos(x)).$$

Avec la même procédure, on peut trouver une primitive pour c_2 comme ça:

$$C_2(x) = \frac{e^{2x}}{20}(-2\sin(x) + \cos(x)).$$

Donc une solution particulière pour (0.47) est

$$z_0(x) = -\frac{e^{-2x}}{20}(2\sin(x) + \cos(x))e^{2x} + \frac{e^{2x}}{20}(-2\sin(x) + \cos(x))e^{-2x} =$$
$$= \frac{-4}{20}\sin(x) = -\frac{\sin(x)}{5}.$$

Donc la solution générale de (0.47) est

$$z(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} - \frac{\sin(x)}{5}, \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vu que $z(x) = y'(x)$, la solution générale de (0.46) est

$$y(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{2x} - \frac{\mu}{2} \cdot e^{-2x} + \frac{\cos(x)}{5} + \gamma, \qquad \forall\, \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut aussi écrire la solution générale comme ça:

$$y(x) = ae^{2x} + b \cdot e^{-2x} + \frac{\cos(x)}{5} + c, \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.3(7) *Résoudre l'équation suivante*

$$y''' + y = 2\cosh(x) + x^2\cos(x) = e^x - e^{-x} + x^2\cos(x). \tag{0.48}$$

Le polynôme associé au cas homogène est $T^3 + 1 = (T+1)(T^2 - T + 1)$, dont les racines sont

$$T_1 = 1, \quad T_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad T_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc un système fondamental de solutions pour le cas homogene est

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{x/2}\cos(\sqrt{3}x/2), \quad y_2(x) = e^{x/2}\sin(\sqrt{3}x/2).$$

On peut chercher une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante (mais cela est tres compliqué dans ce cas). Une autre possibilité est celle-ci: on considère l'équation différentielle

$$u'''(x) + u(x) = e^x - e^{-x} \tag{0.49}$$

et on cherche une solution particulière de la forme:

$$u_0(x) := Ae^x + Bxe^{-x}$$

avec A et B encore à déterminer. On a:

$$\begin{aligned}
u_0'(x) &= Ae^x + Be^{-x} - Bxe^{-x},\\
u_0''(x) &= Ae^x - Be^{-x} - Be^{-x} + Bxe^{-x} = Ae^x - 2Be^{-x} + Bxe^{-x},\\
u_0'''(x) &= Ae^x + 2Be^{-x} + Be^{-x} - Bxe^{-x} = Ae^x + 3Be^{-x} - Bxe^{-x}.
\end{aligned}$$

Alors $y_0(x)$ est solution de (0.49) si et seulement si:

$$\begin{aligned}
e^x - e^{-x} &= u_0'''(x) + u_0(x) =\\
&= Ae^x + 3Be^{-x} - Bxe^{-x} + Ae^x + Bxe^{-x} = 2Ae^x + 3Be^{-x},
\end{aligned}$$

si et seulement si $A = 1/2$ et $B = -1/3$, donc on a la fonction

$$u_0(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

On considère aussi l'équation différentielle

$$v'''(x) + v(x) = x^2 \cos x \tag{0.50}$$

et on cherche une solution particulière de (0.50) de la forme:

$$v_0(x) := A\cos(x) + B\sin(x) + x(C\cos(x) + D\sin(x)) + x^2(E\cos(x) + F\sin(x))$$

avec A, B, C, D, E, F à déterminer. Pour cela, on a:

$$\begin{gathered}
v_0'(x) := -A\sin(x) + B\cos(x) + C\cos(x) + D\sin(x)+\\
+x(-C\sin(x) + D\cos(x)) + 2x(E\cos(x) + F\sin(x)) + x^2(-E\sin(x) + F\cos(x)) =\\
= (B + C)\cos(x) + (D - A)\sin(x)+\\
+x((D + 2E)\cos(x) + (2F - C)\sin(x)) + x^2(-E\sin(x) + F\cos(x)),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
v_0''(x) = -(B + C)\sin(x) + (D - A)\cos(x) + (D + 2E)\cos(x) + (2F - C)\sin(x)+\\
+x(-(D + 2E)\sin(x) + (2F - C)\cos(x)) + 2x((-E\sin(x) + F\cos(x))+\\
+x^2(-E\cos(x) - F\sin(x)) =\\
= (2E + 2D - A)\cos(x) + (2F - 2C - B)\sin(x)+\\
+x((4F - C)\cos(x) + (-4E - D)\sin(x)) + x^2(-E\cos(x) - F\sin(x)),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
v_0'''(x) = -(2E + 2D - A)\sin(x) + (2F - 2C - B)\cos(x)+\\
+(4F - C)\cos(x) + (-4E - D)\sin(x)+\\
+x(-(4F - C)\sin(x) + (-4E - D)\cos(x)) + 2x(-E\cos(x) - F\sin(x))+\\
+x^2(E\sin(x) - F\cos(x)) =
\end{gathered}$$

$$= (6F-3C-B)\cos(x) + (-6E-3D+A)\sin(x)+$$
$$+x((-6E-D)\cos(x) + (-6F+C)\sin(x)) + x^2(-F\cos(x) + E\sin(x)).$$

Donc il faut que:

$$\begin{gathered}
x^2\cos x = v_0'''(x) + v_0(x) = \\
= A\cos(x) + B\sin(x) + x(C\cos(x) + D\sin(x)) + x^2(E\cos(x) + F\sin(x)) + \\
+(6F-3C-B)\cos(x) + (-6E-3D+A)\sin(x)+ \\
+x((-6E-D)\cos(x) + (-6F+C)\sin(x)) + x^2(-F\cos(x) + E\sin(x)) = \\
= (6F-3C+A-B)\cos(x) + (-6E-3D+A+B)\sin(x)+ \\
+x((-6E+C-D)\cos(x) + (-6F+C+D)\sin(x))+ \\
+x^2((E-F)\cos(x) + (E+F)\sin(x)).
\end{gathered}$$

Donc il faut que:

$$\left\{\begin{array}{l}
6F-3C+A-B=0 \\
-6E-3D+A+B=0 \\
-6E+C-D=0 \\
-6F+C+D=0 \\
\left.\begin{array}{c} E-F=1 \\ E+F=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E=1/2 \\ F=-1/2. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

En replaçant E et F, on a:

$$\left\{\begin{array}{l}
-3-3C+A-B=0 \\
-3-3D+A+B=0 \\
\left.\begin{array}{c} -3+C-D=0 \\ 3+C+D=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C=0 \\ D=-3. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

En replaçant C et D, on a:

$$\left\{\begin{array}{l} -3+A-B=0 \\ 6+A+B=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-3/2 \\ B=-9/2. \end{array}\right.$$

Donc on a la fonction

$$v_0(x) := -\frac{3}{2}\cos(x) - \frac{9}{2}\sin(x) - 3x\sin(x) + \frac{x^2}{2}(\cos(x) - \sin(x)).$$

Donc on a trouvé $u_0(x)$ qui est solution de (0.49) et $v_0(x)$ qui est solution de (0.50). Alors la fonction

$$\begin{gathered}
y_0(x) := u_0(x) + v_0(x) = \\
= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{3}{2}\cos(x) - \frac{9}{2}\sin(x) - 3x\sin(x) + \frac{x^2}{2}(\cos(x) - \sin(x))
\end{gathered}$$

est une solution particulière de (0.48). Donc la solution générale de (0.48) est:

$$\begin{gathered}
y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{3}{2}\cos(x) - \frac{9}{2}\sin(x) - 3x\sin(x) + \frac{x^2}{2}(\cos(x) - \sin(x)) + \\
+\lambda e^x + \mu e^{x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + \rho e^{x/2}\sin(\sqrt{3}x/2), \qquad \forall\, \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}
\end{gathered}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.3(8) *Résoudre l'équation suivante*

$$y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin(x). \tag{0.51}$$

Le polynôme associé à l'équation homogène est $T^2 - 2T + 3$, dont les solutions sont les racines différents

$$T = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

Donc un système fondamental de solutions pour le cas homogène est donné par:

$$y_1(x) = e^x \cos(\sqrt{2}x) \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = e^x \sin(\sqrt{2}x)$$

On cherche une solution particulière de (0.51) avec la méthode de la variation de la constante. Donc on cherche $c_1(x)$ et $c_2(x)$, telles que:

$$\begin{cases} c_1(x)e^x \cos(\sqrt{2}x) + c_2(x)e^x \sin(\sqrt{2}x) = 0 \\ c_1(x)e^x(\cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)) + c_2(x)e^x(\sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)) = x^3 + \sin(x). \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1(x) = -c_2(x)\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\cos(\sqrt{2}x)} \\ c_2(x)e^x\left(-\sin(\sqrt{2}x) + \frac{\sqrt{2}\sin^2(\sqrt{2}x)}{\cos(\sqrt{2}x)} + \sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\right) = x^3 + \sin(x). \end{cases}$$

Donc il faut que

$$c_2(x) \cdot e^x \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin^2(\sqrt{2}x) + \cos^2(\sqrt{2}x)}{\cos(\sqrt{2}x)} = x^3 + \sin(x),$$

donc

$$c_2(x) = \frac{(x^3 + \sin(x))\cos(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}e^x}$$

et

$$c_1(x) = -\frac{(x^3 + \sin(x))\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}e^x}.$$

Maintenant il faut trouver une primitive $C_1(x)$ pour c_1. Avant tout, il faut trouver une primitive pour

$$x \mapsto x^3 \sin(\sqrt{2}x)e^{-x}. \tag{0.52}$$

On cherche de faire disparaître x^3 en intégrant par parties 3 fois. Donc avant tout il faut trouver une primitive pour $f(x) := \sin(\sqrt{2}x)e^{-x}$. On cherche une primitive pour cette fonction de la forme

$$F(x) := e^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x))$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$, encore à trouver. $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ si et seulement si:

$$\sin(\sqrt{2}x)e^{-x} = F'(x) =$$
$$= e^{-x}(-A\cos(\sqrt{2}x) - B\sin(\sqrt{2}x) - A\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) + B\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)),$$

si et seulement si

$$-B - A\sqrt{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad -A + B\sqrt{2} = 0.$$

Donc on a $A = -\sqrt{2}/3$ et $B = -1/3$. Donc on a:

$$\int \frac{x^3\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}e^x} = x^3 e^{-x}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos(\sqrt{2}x)-\frac{1}{3}\sin(\sqrt{2}x)\right)$$
$$-\int 3x^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos(\sqrt{2}x)-\frac{1}{3}\sin(\sqrt{2}x)\right).$$

Si on prend encore deux intégrations par parties, on arrive à une primitive pour (0.52) comme suit:

$$G(x) := \frac{1}{e^x}\Big[\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{9}x+\frac{14}{27}\right)\sin(\sqrt{2}x)+$$
$$+\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}x^3-\frac{2\sqrt{2}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{2}}{9}x+\frac{8\sqrt{2}}{27}\right)\cos(\sqrt{2}x)\Big].$$

On peut obtenir le même résultat en supposant que une primitive pour (0.52) est de la forme

$$\frac{1}{e^x}\left[\big(Ax^3+Bx^2+Cx+D\big)\sin(\sqrt{2}x)+\big(Ex^3+Fx^2+Gx+H\big)\cos(\sqrt{2}x)\right]$$

pour des constantes $A,\cdots,H$ réelles à déterminer.

Une primitive pour

$$x \mapsto \sin(x)\sin(\sqrt{2}x)e^{-x}$$

est la fonction

$$H(X) := \frac{1}{e^x}\Big[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(x)\cos(\sqrt{2}x)-\frac{1}{2}\sin(x)\sin(\sqrt{2}x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(x)\cos(\sqrt{2}x)\Big].$$

Donc une primitive pour $c_1(x)$ est la fonction

$$C_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(G(x)+H(X)) =$$
$$= \frac{1}{e^x}\left[\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{3\sqrt{2}}x^2-\frac{10}{9\sqrt{2}}x-\frac{14}{27\sqrt{2}}\right)\sin(\sqrt{2}x)+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{8}{27}\right)\cos(\sqrt{2}x)+$$
$$\left.+\frac{1}{4}\cos(x)\cos(\sqrt{2}x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(x)\sin(\sqrt{2}x)+\frac{1}{4}\sin(x)\cos(\sqrt{2}x)\right] =$$
$$= \frac{1}{e^x}\left[\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{3\sqrt{2}}x^2-\frac{10}{9\sqrt{2}}x-\frac{14}{27\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(x)\right)\sin(\sqrt{2}x)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{8}{27}+\frac{1}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\sin(x)\right)\cos(\sqrt{2}x)\right].$$

De la même façon, une primitive pour c_2 est la fonction:

$$C_2(x) = \frac{1}{e^x}\left[-\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{3\sqrt{2}}x^2-\frac{10}{9\sqrt{2}}x-\frac{14}{27\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(x)\right)\cos(\sqrt{2}x)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{8}{27}+\frac{1}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\sin(x)\right)\sin(\sqrt{2}x)\right].$$

Donc une solution particulière de (0.51) est

$$y_0(x) = C_1(x)e^x \cos(\sqrt{2}x) + C_2(x)e^x \sin(\sqrt{2}x) =$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x)\right)\left(\cos^2(\sqrt{2}x) + \sin^2(\sqrt{2}x)\right) =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x).$$

Comme vous avez vu, cette méthode est très compliqué. Une méthode plus simple pour obtenir la même solution est celle ci:

- on cherche une solution particulière $u_0(x)$ de l'équation différentielle

$$u''(x) - 2u'(x) + 3u(x) = x^3. \tag{0.53}$$

  On cherche u_0 de la forme polynomiale:

$$u_0(x) := Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

  et on détermine $A = 1/3$, $B = 2/3$, $C = 2/9$ et $D = -8/27$, donc on a la fonction

$$u_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27}.$$

- On cherche une solution particulière $v_0(x)$ de l'équation différentielle

$$v''(x) - 2v'(x) + 3v(x) = \sin(x). \tag{0.54}$$

  On cherche $v_0(x)$ sous la forme

$$v_0(x) := E\sin(x) + F\cos(x)$$

  et on trouve $E = F = 1/4$, donc on a la fonction

$$v_0(x) := \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x).$$

Puis on considère la fonction

$$y_0(x) := u_0(x) + v_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x).$$

Pour cette fonction, on a:

$$y_0''(x) - 2y_0'(x) + 3y_0(x) =$$
$$= u_0''(x) - 2u_0'(x) + 3u_0(x) + v_0''(x) - 2v_0'(x) + 3v_0(x) \overset{(0.53),(0.54)}{=} x^3 + \sin(x),$$

donc $y_0(x)$ est une solution particulière de l'équation (0.51). Donc la solution générale de (0.51) est:

$$y(x) = e^x(\alpha\cos(\sqrt{2}x) + \beta\sin(\sqrt{2}x)) + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x),$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.3(9) *Résoudre l'équation suivante*

$$y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x} + xe^{2x}. \tag{0.55}$$

Le polynôme associé à l'équation homogène est $T^2 - 4T + 4 = (T-2)^2$ (une racine double). Donc un système fondamental de solutions pour l'équation homogène est donné par

$$y_1(x) = e^{2x}, \qquad y_2(x) = x \cdot e^{2x}.$$

On cherche une solution particulière de (0.55) avec la méthode de la variation de la constante. Donc on cherche $c_1(x)$ et $c_2(x)$, telles que:

$$\begin{cases} c_1(x)e^{2x} + c_2(x)xe^{2x} = 0 \\ 2c_1(x)e^{2x} + c_2(x)(2xe^{2x} + e^{2x}) = x^3e^{2x} + xe^{2x} \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1(x) = -xc_2(x) \\ -2xc_2(x)e^{2x} + c_2(x)(2xe^{2x} + e^{2x}) = x^3e^{2x} + xe^{2x}. \end{cases}$$

Donc il faut

$$c_2(x)e^{2x} = x^3e^{2x} + xe^{2x} \Longrightarrow c_2(x) = x + x^3$$

et

$$c_1(x) = -x^2 - x^4.$$

Donc une solution particulière de (0.55) est

$$y_0(x) = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)xe^{2x} =$$
$$= e^{2x}\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4}\right) = e^{2x}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{20}\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la solution générale de (0.55) est

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu xe^{2x} + e^{2x}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{20}\right) = e^{2x}\left(\lambda + \mu x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{20}\right), \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.3(10) *Résoudre l'équation suivante*

$$y'' - 5y' + 6y = x + (x^2+1)e^{2x}. \tag{0.56}$$

Le polynôme associé à l'équation homogène est T^2-5T+6, dont le racines différentes sont 2 et 3, donc un système fondamental pour le cas homogène est donné par:

$$y_1(x) = e^{2x} \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = e^{3x}.$$

On cherche une solution particulière de (0.56) avec la méthode de la variation de la constante, donc on cherche $c_1(x)$ et $c_2(x)$ telles que:

$$\begin{cases} c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x} = 0 \\ 2c_1(x)e^{2x} + 3c_2(x)e^{3x} = x + (x^2+1)e^{2x} \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1(x) = -c_2(x)e^{x} \\ -2c_2(x)e^{3x} + 3c_2(x)e^{3x} = x + (x^2+1)e^{2x}. \end{cases}$$

Donc on a:

$$c_1(x) = -\frac{-x}{e^{2x}} + x^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad c_2(x) = \frac{x}{e^{3x}} + \frac{x^2+1}{e^{x}}.$$

En intégrant par parties, une primitive pour c_1 est

$$C_1(x) = e^{-2x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{x^3}{3}+x$$

et une primitive pour c_2 est

$$C_2(x) = e^{-3x}\left(-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)+e^{-x}(-x^2-2x-3).$$

Donc une solution particulière est

$$\begin{gathered} y_0(x) = C_1(x)e^{2x}+C_2(x)e^{3x} = \\ = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{x^3}{3}+x\right)e^{2x}+\left(-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)+\left(-x^2-2x-3\right)e^{2x} = \\ = \frac{x}{6}+\frac{5}{36}+e^{2x}\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x-3\right) \end{gathered}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Vu que e^{2x} est une solution du cas homogène, alors, aussi

$$\widetilde{y_0}(x) := y_0(x)+3e^{2x} = \frac{x}{6}+\frac{5}{36}+e^{2x}\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ est une solution. Donc la solution générale est:

$$y(x) = \lambda e^{2x}+\mu e^{3x}+\frac{x}{6}+\frac{5}{36}+e^{2x}\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x\right), \qquad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.3.1(1) *On dit qu'une équation différentielle est* exacte *si elle est de la forme*

$$y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \tag{0.57}$$

avec

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}. \tag{0.58}$$

Montrer que les solutions de (0.57) *sont les fonctions y qui satisfont l'équation implicite*

$$U(x,y) = C$$

où C est une constante in $\mathbb{R}$ est $U(x,y)$ est définie par l'une des formules équivalentes

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,\mathrm{dt}+\int_{y_0}^{y} g(x,t)\,\mathrm{dt} \tag{0.59}$$

et

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,\mathrm{dt}+\int_{y_0}^{y} g(x_0,t)\,\mathrm{dt}, \tag{0.60}$$

x_0 et y_0 étant des constantes arbitraires. Appliquer ce résultat à l'équation

$$y' = -\frac{y}{x+y}. \tag{0.61}$$

(Remarque: l'équivalence de (0.59) et (0.60) est une conséquence de (0.58)).

On remarque que si on utilise (0.59), alors on a:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = g(x,y). \tag{0.62}$$

Si on utilise (0.60), alors on a:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = f(x,y). \tag{0.63}$$

Donc si $y = y(x)$, alors on a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(x,y(x))}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x}(x,y(x)) + y'(x)\cdot\frac{\partial U}{\partial y}(x,y(x)) \overset{(0.62),(0.63)}{=} \\ &\overset{(0.62),(0.63)}{=} f(x,y(x)) + y'(x)\cdot g(x,y(x)).\end{aligned} \tag{0.64}$$

Donc on a

$$y: I \to \mathbb{R} \text{ satisfait } (0.57) \iff \frac{\partial U(x,y(x))}{\partial x} = 0 \qquad \forall\, x \in I.$$

Maintenant on sait que la dérivée d'une fonction (d'une seule variable) est zéro partout si et seulement si la fonction est constante, donc on a:

$$y: I \to \mathbb{R} \text{ satisfait } (0.57) \iff \exists\, C \in \mathbb{R} \text{ t. q. } U(x,y(x)) = C \qquad \forall\, x \in I.$$

Maintenant on va appliquer ça à (0.61). Dans ce cas, on peut choisir $f(x,y) = y$ et $g(x,y) = x + y$, donc on a

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

et

$$y' = -\frac{y}{x+y} = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}.$$

On doit aussi calculer la fonction $U(x,y)$ dans ce cas. Pour cela, on choisi $x_0 = 0 = y_0$ et on utilise la formule (0.59). Donc on a:

$$U(x,y) = \int_0^x f(t,0)\,\mathrm{dt} + \int_0^y g(x,t)\,\mathrm{dt} = 0 + \int_0^y x + t\,\mathrm{dt} = xy + \frac{y^2}{2}.$$

Donc on a:

$$y: I \to \mathbb{R} \text{ satisfait } (0.61) \iff \exists\, C \in \mathbb{R} \text{ t. q. } xy + \frac{y^2}{2} = C \qquad \forall\, x \in I$$

(pour chaque C fixé, on aura une (o plusieurs) solutions différentes). Si $C = 0$, alors on a la solution $y(x) = 0$ (qui n'est pas très intéressante) et la solution $y(x) = -2x$ (on peut aussi vérifier directement que $y(x) = -2x$ est une solution).

Si $C \neq 0$, alors il faut que

$$y^2(x) + 2xy - 2C = 0 \qquad \forall\, x \in I.$$

Donc si $C > 0$, alors on a deux solutions:

$$y_1(x) := -x + \sqrt{x^2 + 2C} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

et

$$y_2(x) := -x - \sqrt{x^2 + 2C} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si $C < 0$, alors on a les mêmes solutions, mais seulement pour $x \in]-\infty, -\sqrt{2C}[$ et $x \in]\sqrt{2C}, \infty[$.

On peut aussi vérifier directement que y_1 et y_2 sont des solutions de (0.61). Par exemple, pour y_1 on a:

$$y_1'(x) = -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+2C}} = \frac{x - \sqrt{x^2+2C}}{\sqrt{x^2+2C}}$$

et

$$\frac{-y_1}{x+y_1} = \frac{x - \sqrt{x^2+2C}}{x - x + \sqrt{x^2+2C}} = \frac{x - \sqrt{x^2+2C}}{\sqrt{x^2+2C}}.$$

Exercice 8.3.1(2) *On considère l'équation de Lagrange, du type*

$$y = xf(y') + g(y')$$

avec $f(u) \neq u$ pour tout u. Montrer que la résolution de cette équation se ramène à celle d'une équation du premier ordre. (On pourra poser $y' = p$, puis prendre p comme paramètre).

On pose $p(x) := y'(x)$. Donc on cherche $y(x)$ telle que

$$y(x) = xf(p(x)) + g(p(x))$$

et

$$p(x) := y'(x).$$

Si on prend la dérivée de la première ligne (par rapport à x) et on utilise la deuxième ligne, on a:

$$p(x) = f(p(x)) + xf'(p(x)) \cdot p'(x) + g'(p(x)) \cdot p'(x).$$

Donc il faut que

$$p'(x) = \frac{p(x) - f(p(x))}{xf'(p(x)) + g'(p(x))}$$

(pour l'instant on ne considère pas la possibilité que le dénominateur soit zéro).

Vu que $f(u) \neq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, alors on a $p'(x) \neq 0$. Donc en utilisant le théorème d'inversion locale, on peut écrire (au moins localement) $x = x(p)$ et on a:

$$x'(p) = \frac{x(p)f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}.$$

Autrement dit, il faut que $x(p)$ satisfait:

$$x'(p) - \frac{f'(p)}{p - f(p)} \cdot x(p) = \frac{g'(p)}{p - f(p)}. \tag{0.65}$$

Celle-ci est une équation différentielle linéaire (non-homogène), dont on connaît déjà la solution. En générale les solutions sont un espace vectoriel de dimension 1, donc on note $x(p, c)$ une solution quelconque de (0.65), avec $c \in \mathbb{R}$.

Puis on applique de nouveau le théorème d'inversion locale (par rapport à p et x et on trouve (au moins localement) $p = p(x, c)$. Vu que $y'(x) = p(x, c)$, alors il faut seulement trouver les primitives pour $p(x, c)$.

Exercice 8.3.1(3) *On considère maintenant l'*équation de Clairaut, *de la forme*

$$y = xy' + g(y'). \tag{0.66}$$

Montrer qu'on peut exprimer la solution sous forme paramétrique en (x, y) dépendant du paramètre p défini par $p = y'$.

(Remarque: on ne peut pas utiliser l'Exercice 8.3.1(2) avec $f(y') = y'$ parce que dans 8.3.1(2) on avait la condition $f(u) \neq u$ pour tout u).

On note I un domaine de definition maximale pout $y(x)$. Si on dérive (0.66), on obtient:

$$y'(x) = y'(x) + xy''(x) + y''(x)g'(y'(x)) \Longleftrightarrow y''(x)(x + g'(y'(x))) = 0. \tag{0.67}$$

(A) Si $y''(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors on a $y(x) = Cx + D$, où C, D sont constantes réelles. Vu qu'il faut vérifier l'équation de Clairaut, on a:

$$Cx + D = y(x) = xy'(x) + g(y'(x)) = Cx + g(C) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Donc il faut $D = g(C)$, donc on a une famille de solutions:

$$y(x) = Cx + g(C), \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(B) Si $x + g'(y'(x)) = 0$ pour tout $x \in I$, alors on pose $p := y'$ et on a $x + g'(p) = 0$.

Par exemple, on peut considérer l'équation de Clairaut:

$$y = xy' + (y')^2. \tag{0.68}$$

Pour cette équation, on a toutes les solutions du cas (A), c'est-à-dire

$$y(x) = Cx + C^2, \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En plus, on a la solution du cas (B), c'est-à-dire la fonction y telle que $x + 2y' = 0$. A priori toutes les fonctions de la forme $y(x) = -x^2/4 + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des solutions. Si on le replace en (0.68), la seule solution est celle avec $\lambda = 0$, donc le cas (B) donne seulement la solution $y(x) = -x^2/4$.

Mathematics Research Unit
University of Luxembourg
6, rue Richard Coudenhove-Kalergi
L-1359 Luxembourg

website: http://matteotommasini.altervista.org/

email: matteo.tommasini2@gmail.com